Glava 1

Kompleksne funkcije

1.1 Funkcije kompleksne promenljive

1.1.1 Pojam kompleksnog broja

Algebarski oblik kompleksnog broja. *Kompleksan broj* definišemo kao izraz $x + yi$, gde su x i y realni brojevi, a i, koje zovemo *imaginarnom jedinicom*, ima osobinu da je $i^2 = -1$. Ako je $z = x + yi$, onda x zovemo *realnim delom* kompleksnog broja z, a y zovemo *imaginarnim delom* broja z i označavamo ih sa $Re(z)$ i $Im(z)$. Kompleksni brojevi $x_1 + y_1 i$ i $x_2 + y_2 i$ su *jednaki* ako i samo ako je $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$. *Konjugovano kompleksan broj*, odnosno *konjugat*, kompleksnog broja $x + yi$ je $x - yi$. Konjugovano kompleksan broj broja z se označava sa $\bar{z}$. Skup svih kompleksnih brojeva označavamo sa $\mathbf{C}$. Nije teško uočiti da se skup realnih brojeva može smatrati podskupom skupa kompleksnih brojeva, pošto realne brojeve možemo shvatiti kao kompleksne čiji je imaginaran deo nula.

Funkcijom $f(x + yi) = (x, y)$ definišemo izomorfizam vektorskih prostora $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ i $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$. Metriku u oba prostora definišemo sa $d(x_1 + y_1 i, x_2 + y_2 i) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, te ćemo kompleksne brojeve geometrijski predstavljati kao tačke prostora $\mathbf{R}^2$. Osu na kojoj unosimo $Re(z)$ nazivamo *realna osa* i označavamo sa Re, a osu na kojoj unosimo $Im(z)$ nazivamo *imaginarna osa* i označavamo sa Im. Jedinični vektori ovih osa čine bazu i definišu *kompleksnu ravan.* Pojam beskonačnosti, u kompleksnom smislu, razlikuje se od pojma realne beskonačnosti. Kako skup kompleksnih brojeva nije uređen, tada se ne može govoriti o pozitivnoj ili negativnoj beskonačnosti. Beskonačnost (∞) treba shvatiti kao "tačku" koja je beskonačno udaljena od koordinatnog početka i do koje se stiže bilo kojim beskonačnim kretanjem kroz kompleksnu ravan.

Osnovne operacije sa kompleksnim brojevima. U izvođenju operacija sa kompleksnim brojevima možemo koristiti algebru realnih brojeva, zamenjujući i^2 sa -1 kada god se pojavi.

1. *Sabiranje i oduzimanje*

$$(x_1 + y_1 i) \pm (x_2 + y_2 i) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i.$$

2. *Množenje*

$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

3. *Deljenje*

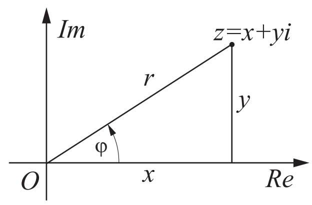
$$\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} \cdot \frac{x_2 - y_2 i}{x_2 - y_2 i} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Modul kompleksnog broja. *Modul broja* $z = x + yi$, u oznaci $|z|$, definiše se kao $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ i predstavlja rastojanje broja od koordinatnog početka.

Za kompleksne brojeve $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ važi:

1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ za $z_2 \neq 0$;
2. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
3. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ i $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$;

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja. Ako je $z = x + yi$ tačka u kompleksnoj ravni, možemo videti sa Slike 1 da važi $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ gde je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, a φ je ugao koji vektor $\vec{r}$ položaja tačke z gradi sa Re osom i nazivamo ga *argumentom* kompleksnog broja z i označavamo ga sa $Arg(z)$. Uočimo da argument kompleksnog broja nije jedinstveno određen, nego je



Slika 1.

određen do na $2k\pi$, gde je k ma koji ceo broj. Odavde sledi da je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, što nazivamo *trigonometrijskim oblikom* kompleksnog broja, a r i φ nazivamo *polarnim koordinatama.*

Nije teško uočiti da je $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \alpha$ pri čemu mogu nastati sledeći slučajevi, u zavisnosti od položaja tačke $z = x + yi$:

(i) Ako je tačka u prvom kvadrantu, tada je $\alpha = 0$;

(ii) Ako je tačka u drugom ili trećem kvadrantu, tada je $\alpha = \pi$;

(iii) Ako je tačka u četvrtom kvadrantu, tada je $\alpha = 2\pi$.

Na ovakav način dobijamo da $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Moivre**ova formula.** Ako su $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ kompleksni brojevi, pri čemu je $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, tada imamo da je

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

što se dokazuje pomoću adicionih formula za trigonometrijske funkcije. Generalizacijom ovih formula dobijamo

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n)),$$

odakle za $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$ dobijamo da važi

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Poslednji izraz nazivamo Moivreovom formulom.

Eksponencijalni oblik kompleksnog broja. Polazeći od MacLaurinovih razvoja funkcija $e^x, \sin x$ i $\cos x$, uzimajući da je $x = i\varphi$ dobijamo Eulerovu formulu $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, odakle sledi da je kompleksan broj moguće predstaviti u obliku $z = re^{i\varphi}$, što predstavlja *eksponencijalni oblik* kompleksnog broja.

Koreni kompleksnog broja. Broj w nazivamo n-tim *korenom* kompleksnog broja z ako je $w^n = z$ i pišemo $w = z^{\frac{1}{n}}$, gde je n pozitivan ceo broj. Iz Moivreove formule, zbog periodičnosti trigonometrijskih funkcija, dobijamo da važi

$$z^{\frac{1}{n}} = (r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)))^{\frac{1}{n}},$$
$$= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

Za $k = 0, 1, \ldots, n-1$ dobijaju se različite vrednosti prethodnog izraza iz čega sledi da postoji n različitih vrednosti za $z^{\frac{1}{n}}$, pod uslovom da je $z \neq 0$.

1.1.2 Pojam funkcije kompleksne promenljive

Ako svakoj vrednosti kompleksne promenljive z, prema nekom pravilu f odgovara jedan ili više komepleksnih brojeva w, kažemo da je w *funkcija* od z i pišemo $w = f(z)$.

Jednoznačne i višeznačne funkcije. Ako samo po jedna vrednost w odgovara svakoj od vrednosti z, kažemo da je w *jednoznačna (uniformna)* funkcija od z. Ako više od jedne vrednosti w odgovaraju svakoj od vrednosti z, kažemo da je w *višeznačna (multiformna)* funkcija od z [1] .

Načini zadavanja kompleksne funkcije. Neka je $z = x + yi$ proizvoljna tačka iz $\mathbf{C}$. Postoji više načina zapisa funkcije kompleksne promenljive.

a) *Zatvoreni* oblik funkcije zadaje se izrazom koji zavisi samo od nezavisno promenljive z (bez $\bar{z}$).

b) *Razdvojeni* oblik zadaje se izrazom $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, pri čemu se $u(x, y)$ i $v(x, y)$ nazivaju realan i imaginaran deo funkcije $f(z)$.

c) *Eksponencijalni* oblik zadaje se izrazom $f(z) = R(x, y)e^{i\theta(x,y)}$, gde se $R(x, y)$ naziva funkcijom rastojanja, a $\theta(x, y)$ funkcijom argumenta funkcije $f(z)$.

Analogni oblici kompleksne funkcije mogu se definisati ako je nezavisna promenljiva z zadata u polarnim koordinatama.

Pitanja postojanja granične vrednosti i neprekidnosti funkcije $f(z)$ u tački $z_0 = x_0+y_0 i$ svode se na ekvivalentna pitanja za funkcije $u(x, y)$ i $v(x, y)$ (odnosno $R(x, y)$ i $\theta(x, y)$) u tački (x_0, y_0), kada se te funkcije posmatraju kao funkcije dve promenljive.

Elementarne funkcije

a) **Eksponencijalna funkcija** se definiše izrazom

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

gde je *e baza prirodnog logaritma.* Ako je a realan i pozitivan broj

[1] Navedene definicije mogu se strogo formalizovati, što bi znatno opteretilo tekst ove knjige.

definišemo $a^z = e^{z \ln a}$, gde je $\ln a$ *prirodan logaritam* broja a. Ovo se svodi na prethodno ako je $a = e$.

Kompleksna eksponencijalna funkcija ima osobine slične realnoj eksponencijalnoj funkciji. Na primer, $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$.

b) **Trigonometrijske funkcije.**

Sinusna funkcija	$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$;
Kosinusna funkcija	$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$;
Tangensna funkcija	$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}$;

Navodimo neke od osobina kompleksnih trigonometrijskih funkcija. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$, $\mathrm{tg}\,(-z) = -\mathrm{tg}\, z$, $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$, $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$.

Interesantno je da sinusna i kosinusna funkcija nisu ograničene na kompleksnom domenu. Na primer, ako u izrazu koji definiše sinusnu funkciju, z zamenimo sa ix dobijamo da je $\sin ix = -\frac{1}{i}\mathrm{sh}\, x$, odakle zbog neograničenosti funkcije $\mathrm{sh}\, x$ sledi neograničenost sinusne funkcije. Slično se pokazuje neograničenost kosinusne funkcije.

c) **Hiperboličke funkcije** se definišu na sledeći način:

Sinushiperbolička funkcija	$\mathrm{sh}\, z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$;
Kosinushiperbolička funkcija	$\mathrm{ch}\, z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$;
Tangenshiperbolička funkcija	$\mathrm{tgh}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z} = \frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}$;

Navodimo neke od adicionih formula koje važe za hiperboličke funkcije: $\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1$, $\mathrm{sh}\,(-z) = -\mathrm{sh}\, z$, $\mathrm{ch}\,(-z) = \mathrm{ch}\, z$, $\mathrm{tgh}\,(-z) = -\mathrm{tgh}\, z$, $\mathrm{sh}\,(z_1 \pm z_2) = \mathrm{sh}\, z_1 \mathrm{ch}\, z_2 \pm \mathrm{ch}\, z_1 \mathrm{sh}\, z_2$, $\mathrm{ch}\,(z_1 \pm z_2) = \mathrm{ch}\, z_1 \mathrm{ch}\, z_2 \mp \mathrm{sh}\, z_1 \mathrm{sh}\, z_2$.

Višeznačne funkcije. Kao motivaciju za posmatranje višeznačnih funkcija razmatraćemo funkciju $f(z) = Arg(z)$. Zbog periodičnosti funkcija $\sin \varphi$ i $\cos \varphi$, čiji je period 2π iz trigonometrijskog oblika kompleksnog broja zaključujemo da argument kompleksnog broja nije jedinstveno određen, nego je određen do na $2k\pi$ gde je k bilo koji ceo broj. Dakle, ako je $z = re^{i(\varphi + 2k\pi)}$ ($\varphi \in [0, 2\pi)$ je fiksirano), tada funkcija

$Arg(z) = \varphi + 2k\pi$ promenljivoj z pridružuje beskonačno mnogo različitih realnih vrednosti, i ona predstavlja najelementarniji primer višeznačne (multiformne) funkcije. Vrednosti ove funkcije nazivaćemo glavnim vrednostima ukoliko je $Arg(z) = \varphi \in [0, 2\pi)$ i takvu vrednost argumenta označavaćemo sa $arg(z)$. Postavlja se pitanje da li će vrednosti nekih drugih funkcija zavisiti od izbora vrednosti argumenta ako se nezavisno promenljive zadaju u polarnim koordinatama. Odgovor je naravno potvrdan. Razmotrićemo uticaj izbora argumenta nezavisno promenljive na vrednost korene i logaritamske funkcije.

Elementaran primer višeznačnog preslikavanja je $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$. Kako je svaku tačku kompleksne ravni moguće predstaviti kao $z = re^{i(\varphi+2k\pi)}$, ($k \in \mathbf{Z}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ fiksirano) tada je skup slika ove tačke dat sa $z^{\frac{1}{2}} = \{r^{\frac{1}{2}}e^{(\frac{\varphi}{2}+k\pi)i} | k \in \mathbf{Z}\}$. Vidimo da za $k \in 2\mathbf{Z}$ dobijamo iste vrednosti ove funkcije, a takođe i za $k \in 2\mathbf{Z} - 1$. Stoga, moguće je izdvojiti dve različite vrednosti ove funkcije koje odgovaraju istoj tački. Ako je $Arg(z) \in [4k\pi, (4k + 2)\pi)$ tada se slike nalaze u gornjoj poluravni uključujući i pozitivan deo realne ose, a ako je $Arg(z) \in [(4k + 2)\pi, (4k + 4)\pi)$ slike se nalaze u donjoj poluravni uključujući i negativan deo realne ose. Zbog prethodno navedenog dovoljno je posmatrati dve vrednosti argumenta nezavisno promenljive i to slučajeve kada $Arg(z) \in [0, 2\pi)$ i $Arg(z) \in [2\pi, 4\pi)$. Zamislimo da se kompleksna ravan sastoji od dva lista [1] i to na prvom listu argumenti kompleksnih brojeva su na intervalu $[0, 2\pi)$, a na drugom na intervalu $[2\pi, 4\pi)$. Odgovarajuće funkcije koje slikaju ove listove nazivamo granama [2] funkcije $f(z)$. Kako nije moguće uzimanje tačaka sa različitih listova, a da funkcija pritom ostane jednoznačna tada se povlači zasek [3] , u ovom slučaju duž pozitivnog dela realne ose. Zamislimo da je gornja granica prvog lista spojena sa donjom granicom drugog lista, po zaseku, i obrnuto. Tada se prelazeći preko zaseka, prelazi sa jednog na drugi list a samim tim se menja i grana funkcije. Za funkciju $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ kažemo da je

[1] *list* je standardan naziv za predstavljanje svih tačaka kompleksne ravni na kojima je funkcija jednoznačna, što se postiže definisanjem granica za argument tačaka.

[2] *grana* predstavlja restrikciju funkcije na njen list.

[3] *zasek* predstavlja barijeru preko koje nije moguće preći pri posmatranju tačno jedne grane višeznačne funkcije. Povlačenjem zaseka moguće je definisati tačno jednu granu funkcije na skupu kompleksnih brojeva bez zaseka.

dvolisna, to jest da se njena RIEMANNova [4] površ sastoji od dva lista. Vidimo da se obilaskom oko tačaka $z = 0$ i $z = \infty$ argument nezavisno promenljive menja tako da dolazi do promene grane funkcije. One predstavljaju algebarske tačke grananja [5] drugog reda funkcije $f(z)$. Uopštavajući ovaj primer, s obzirom na definisanje pojma korena kompleksnog broja, zaključujemo da funkcija $f(z) = z^{\frac{1}{n}}$, gde je n prirodan broj, ima n grana, a tačke 0 i ∞ su algebarske tačke grananja $n-$tog reda. Listovi RIEMANNove površi definisani su sa $L_k = \{z = re^{i\varphi} \mid \varphi \in [2k\pi, 2(k+1)\pi)\}$, za $k = 0, 1...n-1$.

Drugi, tipičan primer, multiformnog preslikavanja jeste logaritamska funkcija. Po definiciji imamo da je $\mathrm{Ln}\, re^{i(\varphi+2k\pi)} = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$. Dakle, skup slika tačke $z \in \mathbf{C}$ je beskonačan. Vidimo, da se u ovom slučaju RIEMANNova površ sastoji od beskonačno (ali prebrojivo) mnogo listova, koji su definisani sa $L_k = \{z = re^{i\varphi} \mid \varphi \in [2k\pi, 2(k+1)\pi)\}$, za $k \in \mathbf{Z}$, a zasek možemo povući duž pozitivnog dela realne ose. Obilazeći oko tačaka $z = 0$ i $z = \infty$ menja se grana funkcije i one predstavljaju transcedentne tačke grananja. Povlačenjem zaseka na različite načine, možemo definisati "razne vrednosti logaritamske funkcije". Ako bi povukli zasek duž poluprave $Re(z) = Im(z)$ u prvom kvadrantu, tada su listovi definisani sa $L_k = \{z = re^{i\varphi} \mid \varphi \in [\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{9\pi}{4} + 2k\pi)\}$, za $k \in \mathbf{Z}$.

Ako se u prethodnim primerima zahteva da je $Arg(z) \in [0, 2\pi)$ tada dobijamo *glavne vrednosti* logaritamske i korene funkcije i u tom slučaju Ln označavamo sa ln.

Definisaćemo još neke elementarne funkcije koje su determinisane granom višeznačne logaritamske i korene funkcije.

d) **Inverzne trigonometrijske funkcije.**

Arkus-sinus $\mathrm{Arcsin}\,(z) = -i\mathrm{Ln}\,(iz + \sqrt{1-z^2})$;

Arkus-kosinus $\mathrm{Arccos}\,(z) = -i\mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2-1})$;

[4] RIEMANN*ova površ* funkcije predstavlja skup svih njenih listova.

[5] tačka, obilaskom oko koje dolazi do promene argumenata drugih tačaka, a samim tim i promene grane funkcije naziva se *tačka grananja*. Red tačke grananja predstavlja broj grana koje se međusobno menjaju obilaskom oko nje i on može biti algebarski (konačan) ili transcedentan (beskonačan).

e) **Inverzne hiperboličke funkcije.**

Arkus-sinushiperbolikus $\quad \mathrm{Arcsh}\,(z) = \mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2+1});$

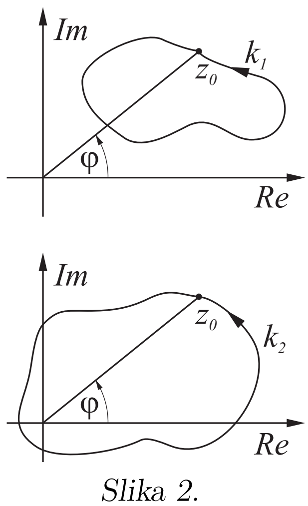
Arkus-kosinushiperbolikus $\quad \mathrm{Arcch}\,(z) = \mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2-1});$

Uzimajući glavne vrednosti logaritamske funkcije dobijamo glavne vrednosti inverznih trigonometrijskih i hiperboličkih funkcija.

Sledeći, nešto detaljniji tekst, ima za cilj da omogući studentu lakše usvajanje postupka odabira tačno jedne grane multiformne funkcije. U vezi sa tim postoje dva osnovna pitanja.

(1) **Kako povući zasek tako da je moguće izdvojiti jedinstveno definisanu granu funkcije?**
Neka se tačka kreće po pozitivno orijentisanoj zatvorenoj krivoj u kompleksnoj ravni iz koje je izbačen zasek. Zasek treba povući tako da ne dođe do promene vrednosti funkcije u njoj, kada se ona vrati u prvobitni položaj.

Posmatrajmo funkciju $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$. Neka je $z_0 \in \mathbf{C}$ proizvoljna tačka čiji je argument jednak φ. Ako se tačka kreće po konturi k_1 sa Slike 2 nakon povratka u prvobitni položaj njen argument ostaje nepromenjen, a samim tim i vrednost funkcije u njoj. Ako se tačka kreće po konturi k_2 sa Slike 2, nakon povratka u prvobitni položaj njen argument postaje $\varphi + 2\pi$, te se vrednost u njoj menja. Dovoljno je zasek povući tako da sadrži tačku $z = 0$, a standardno se povlači duž pozitivnog dela realne ose. Dakle, u opštem slučaju zasek treba da sadrži sve tačke grananja funkcije, jer se obilazeći oko njih argument menja tako da utiče na vrednost funkcije.



Slika 2.

(2) **Kako definisati određenu granu funkcije?**
Prvo definišemo vrednost u nekoj konkretnoj tački. Funkciju predstavimo u obliku proizvoda i količnika elemenata oblika $z-a$ i kompozicije sa elementarnim funkcijama. Za tačku, u kojoj je definisana vre-

dnost funkcije, odredimo vrednosti argumenata elemenata prethodnog tipa. Argument elementa $z-a$ u nekoj tački z_0 je ugao pod kojim se vidi tačka z_0 iz tačke a. Tačku u kojoj je poznata vrednost funkcije, spojimo krivom γ, koja ne seče zasek (jer je na tom skupu funkcija jednoznačno definisana), sa tačkom u kojoj tražimo vrednost funkcije. Promena argumenta, duž krive γ, u oznaci $\triangle_\gamma \mathrm{Arg}\,(z-a)$, predstavlja razliku argumenata uglova između vektora položaja (u odnosu na tačku a) tačke u kojoj tražimo vrednost i tačke u kojoj je vrednost poznata, i to onaj ugao kome pripada kriva koja te tačke spaja. Konačni argument jednog elementa oblika $z-a$, u tački čiju vrednost tražimo jednak je zbiru argumenta elementa $z-a$ tačke čiju vrednost smo prvenstveno definisali i promene argumenta. Kompozicijom sa elementarnim funkcijama dobijamo argument vrednosti funkcije u tački u kojoj odredjujemo vrednost. Vrednost funkcije je određena izrazom $f(z)=|f(z)|\,e^{i\arg f(z)}$.

1.2 Diferencijabilnost funkcija kompleksne promenljive

1.2.1 Pojam izvoda

Definicija 1. Neka je funkcija $f(z)$ jednoznačno definisana u nekoj okolini tačke $z_0 \in \mathbf{C}$. *Izvod* funkcije $f(z)$ u tački z_0 definišemo pomoću

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \tag{1}$$

pod uslovom da postoji konačna granična vrednost. Uočimo da zamenom $z = z_0 + \Delta z$ dobijamo ekvivalentnu definiciju izvoda izrazom

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{1'}$$

Funkcija koja ima izvod u tački z_0 naziva se *diferencijabilnom* u toj tački. Ako je funkcija diferencijabilna u tački z_0 i nekoj njenoj otvorenoj okolini tada kažemo da je ona *regularna* u toj tački. Funkcija je regularna na nekom otvorenom skupu ako je regularna u svim tačkama tog skupa. Za funkciju koja je regularna u svim tačkama nekog otvorenog skupa, sem možda u njih konačno mnogo, kažemo da je *analitička* na tom skupu. Tačke u kojima funkcija nije regularna nazivamo *singularitetima* funkcije.

Uslov diferencijabilnosti funkcije ekvivalentan je uslovu postojanja kompleksnog broja A i funkcije $w(z)$ tako da je

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + w(z_0 + \Delta z)\Delta z, \tag{2}$$

pri čemu važi da je $\lim_{\Delta z \to 0} w(z_0 + \Delta z) = 0$.
Analogno ekvivalenciji (1) i (1′) imamo da je uslov (2) ekvivalentan uslovu

$$f(z) - f(z_0) = A(z - z_0) + w(z)(z - z_0), \tag{2'}$$

pri čemu je $\lim_{z \to z_0} w(z) = 0$.

Dokaz ekvivalencija uslova (1) i (2) zasniva se na činjenici da je $A = f'(z_0)$, ukoliko je funkcija diferencijabilna u tački z_0.

Sva pravila nalaženja izvoda funkcije koja važe za funkcije realne promenljive važe i u kompleksnoj analizi. Takođe, nije teško proveriti da je tablica izvoda elementarnih jednoznačnih funkcija identična tablici izvoda funkcije realne promenljive.

Iz diferencijabilnosti funkcije sledi neprekidnost. Neka je funkcija diferencijabilna u tački z_0. Iz (2) dobijamo da je

$$\lim_{z\to z_0}(f(z)-f(z_0)) = f'(z_0)\lim_{z\to z_0}(z-z_0) = 0,$$

odakle sledi da je $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ što dokazuje neprekidnost funkcije u tački z_0. Obrnuto ne važi. Posmatrajmo funkciju $f(z) = \bar{z} = x - yi$. Funkcije $u(x,y) = x$ i $v(x,y) = -y$ su neprekidne pa je i $f(z) = \bar{z}$ neprekidna funkcija. Kako je

$$\lim_{\Delta z\to 0}\tfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\tfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\tfrac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

uzimajući da je $\Delta y = 0$, a $\Delta x \to 0$ dobijamo graničnu vrednost 1, a uzimajući $\Delta y \to 0$ dok je $\Delta x = 0$ dobijamo -1. Dakle, granična vrednost ne postoji pa funkcija nema izvod ni u jednoj tački.

L'Hospital**ovo pravilo.** Ako je $\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} g(z) = 0$ pri čemu su f i g diferencijabilne funkcije u z_0 i važi da je $g'(z_0) \neq 0$, tada je $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$.

Dokaz. Kako zbog uslova (2′) važi da je

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + w_1(z)(z-z_0)$$
$$g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z-z_0) + w_2(z)(z-z_0)$$

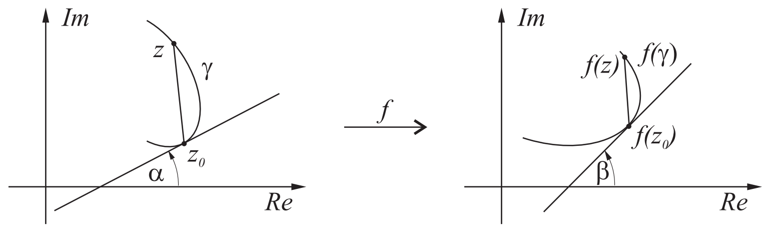
odakle dobijamo da je

$$\lim_{z\to z_0}\tfrac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0}\tfrac{f'(z_0)+w_1(z)}{g'(z_0)+w_2(z)} = \tfrac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Geometrijska interpretacija izvoda. Neka je funkcija $f(z)$ regularna u tački z_0 i neka je $f'(z_0) \neq 0$. Neka se tačka z_0 nalazi na krivoj γ koja se slika u krivu $f(\gamma)$. Ako postoji tangenta na krivu γ u tački z_0, to jest postoji $\lim_{z\to z_0} arg(z-z_0)$, tada i slika $f(\gamma)$ ove krive ima tangentu u tački $f(z_0)$ to jest postoji $\lim_{z\to z_0} arg\,(f(z)-f(z_0))$. Neka su α i β uglovi koje grade tangente u tački i njenoj slici sa realnom osom. Iz uslova $(1')$ imamo da je

$$\arg f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \arg(f(z) - f(z_0)) - \lim_{z\to z_0} arg(z - z_0) = \beta - \alpha.$$

Dakle, argument izvoda funkcije u tački z_0 predstavlja razliku uglova koje tangente u toj tački i njenoj slici grade sa realnom osom.



Slika 3.

Posmatrajmo modul izvoda. Kako je

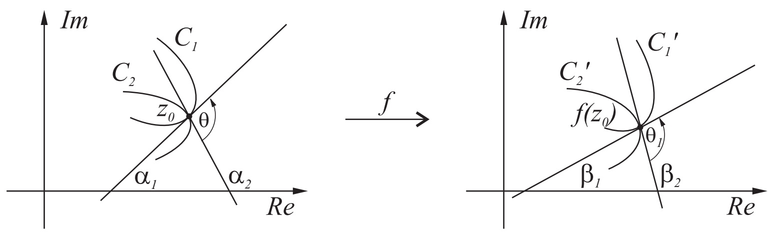
$$|f'(z_0)| = \lim_{z\to z_0} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|},$$

zaključujemo da modul izvoda predstavlja koeficijent deformacije (skraćenja ili izduženja) tetive krive.

Definicija 2. Preslikavanje koje ima osobinu da čuva uglove u smislu veličine i orjentacije naziva se *konformno* preslikavanje.

Teorema 1. Ako je $f'(z) \neq 0$ na nekom otvorenom skupu tada je preslikavanje f konformno na tom skupu.

Dokaz. Neka su C_1 i C_2 krive koje se seku u tački z_0, a C_1' i C_2' njihove slike koje se seku u tački $f(z_0)$.



Slika 4.

Kako je $\beta_1 - \alpha_1 = arg\, f'(z_0) = \beta_2 - \alpha_2$ tada je $\alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2 - \beta_1$, a samim tim i $\theta = \theta_1$, što znači da su uglovi između krivih jednaki.

Bilinearna transformacija definiše se pomoću $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, pri čemu važi uslov $ad - bc \neq 0$, koji se uvodi kako bi bila eliminisana mogućnost linearne zavisnosti funkcija u brojiocu i imeniocu jer bi se u tom slučaju funkcija svela na konstantu. Nije teško uočiti da je $f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$ te je ovo preslikavanje konformno.

1.2.2 Potrebni i dovoljni uslovi diferencijabilnosti

Teorema 2. Jednoznačna funkcija $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $(z = x+yi)$ je diferencijabilna u tački $z_0 = x_0 + y_0 i$ ako i samo ako su $u(x,y)$ i $v(x,y)$ diferencijabilne u tački (x_0, y_0) i važe CAUCHY-RIEMANNovi uslovi

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \ \text{ i } \ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Dokaz. Uslovi su potrebni. Ako je f diferencijabilna u tački z_0, tada postoji granična vrednost

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

odnosno,

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left\{ \frac{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0)}{\Delta x + i\Delta y} + i\frac{v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0)}{\Delta x + i\Delta y} \right\}.$$

Kako prethodna granična vrednost ne zavisi od krive po kojoj $\Delta x \to 0$ i $\Delta y \to 0$ posmatrajmo dva slučaja:

(i) Ako je $\Delta y = 0$, a $\Delta x \to 0$ dobijamo da je

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0,y_0)}{\Delta x} + i\frac{v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0,y_0)}{\Delta x} \right\} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \end{aligned}$$

(ii) Ako je $\Delta x = 0$, a $\Delta y \to 0$ dobijamo da je

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \left\{ \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0)}{i\Delta y} + \frac{v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0)}{\Delta y} \right\} \\ &= -i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova iz (i) i (ii)dobijamo CAUCHY-RIEMANNove uslove.

Iz dokaza ovog dela teoreme zaključujemo da je izvod funkcije moguće odrediti na više načina i to:

$$\boxed{\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \end{aligned}}$$

Dokažimo diferencijabilnost funkcija $u(x,y)$ i $v(x,y)$. Kako je $f(z)$ diferencijabilna u $z_0 = x_0 + y_0 i$, postoji funkcija $w(z) = w_1(x,y) + iw_2(x,y)$, takva da važi

(3) $u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) + iv(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0) =$

$f'(z_0)(\Delta x + i\Delta y) + (w_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) + iw_2(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y))(\Delta x + i\Delta y),$

pri čemu važi da je

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} w_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} w_2(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = 0.$$

Zamenjujući $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$, nakon izjednačavanja realnih delova leve i desne strane jednakosti (3), dobijamo da važi

$$u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y +$$

$$w_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x - w_2(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta y.$$

Kako je $\frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} < 1$ i $\frac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} < 1$ imamo da je

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{w_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x - w_2(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0.$$

Poslednja jednakost obezbeđuje diferencijabilnost funkcije $u(x,y)$ u tački (x_0,y_0). Diferencijabilnost funkcije $v(x,y)$ u tački (x_0,y_0) dokazujemo analogno, zamenjujući u (3) $f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$ i izjednačavanjem imaginarnih delova.

Uslovi su dovoljni. Kako su funkcije $u(x,y)$ i $v(x,y)$ diferencijabilne u (x_0,y_0) imamo da važi

(4) $\quad u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0) =$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \theta_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \text{ i}$$

(5) $$v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \theta_2(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y),$$

pri čemu je

(6) $$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\theta_i(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0, \text{ za } i = 1, 2.$$

Sabiranjem jednakosti (4) sa jednakošću (5) koja je prethodno pomnožena sa i dobijamo da je

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})_{(x_0,y_0)}\Delta x + (\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y})_{(x_0,y_0)}\Delta y +$$

$$+\theta_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + i\theta_2(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y).$$

Zamenjujući CAUCHY-RIEMANNove uslove $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ i $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ u prethodnu jednakost dobijamo da je

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})_{(x_0,y_0)}(\Delta x + i\Delta y)$$

$$+\theta_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + i\theta_2(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y),$$

a kako je zbog uslova (6) i ekvivalentnosti apsolutne i obične konvergencije ka nuli

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\theta_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)+i\theta_2(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y} = 0,$$

na osnovu (2), sledi da je funkcija $f(z)$ diferencijabilna u z_0.

Nije teško uočiti da se svaka kompleksna funkcija $f(z)$ $(z = x + yi)$ transformacijom $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ i $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ može predstaviti u obliku

$$f(z, \bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Teorema 3. Ako je jednoznačno definisana funkcija $f(z, \bar{z}) = u(x, y)+ iv(x, y)$ regularna u nekoj jednostruko povezanoj oblasti tada je $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Dokaz. Diferenciranjem jednakosti koja definiše zadati oblik funkcije po $\bar{z}$ dobijamo da je

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + i(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})i.$$

Kako je funkcija regularna, zbog CAUCHY-RIEMANNovih uslova, izrazi u zagradama na desnoj strani prethodne jednakosti su nula, čime je tvrđenje teorema dokazano.

Tvrđenje prethodne teoreme ima za posledicu da je regularnu funkciju moguće predstaviti u zatvorenom obliku.

Teorema 4. Ako je funkcija $f(z) = u(x, y) + v(x, y)$, $(z = x + yi)$, diferencijabilna u tački $z_0 = x_0 + iy_0$ tada su funkcije $u(x, y)$ i $v(x, y)$ *harmonijske* u tački (x_0, y_0), to jest važi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 0 \text{ i } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 0.$$

Za funkcije u i v kažemo da su *konjugovano harmonijske.*

Dokaz. Diferenciranjem prvog CAUCHY-RIEMANNovog uslova po promenljivoj x i drugog po promenljivoj y dobijamo $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0, y_0) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$. Sabiranjem prethodnih jednakosti dobijamo uslov harmoničnosti za funkciju u. Analogno dokazujemo uslov za v.

Postavlja se pitanje: Da li je moguće odrediti regularnu funkciju ako je poznata jedna od funkcija u ili v? Naravno, odgovor je potvrdan, ukoliko je zadata funkcija harmonijska. Rešavanjem sistema parcijalnih jednačina definisanog CAUCHY-RIEMANNovim uslovima, dobijamo drugu konjugovano harmonijsku funkciju.

1.3 Kompleksna integracija

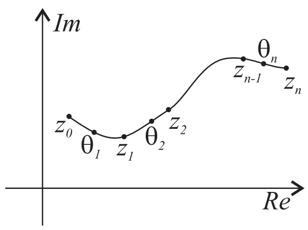
1.3.1 Pojam kompleksnog krivolinijskog integrala

Definicija 3. Neka je $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ zatvoren interval. Neprekidno preslikavanje $l : [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$ naziva se *kriva* u $\mathbf{C}$. Kriva je JORDAN*ova* ili *prosta* ako za sve $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ za koje je $t_1 \neq t_2$ važi da je $l(t_1) \neq l(t_2)$. Kriva je *zatvorena* ili *kontura* ukoliko važi da je $l(\alpha) = l(\beta)$. Kriva se naziva *rektificibilnom* ili *izmerivom* ukoliko postoji realan broj $M > 0$, tako da za svaku podelu intervala $[\alpha, \beta]$ određenu sa $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ važi da je $\sum_{i=1}^{n} |l(t_i) - l(t_{i-1})| < M$. Ako je funkcija l diferencijabilna, pri čemu je $l'(t) \neq 0$ tada kaězmo da je kriva *glatka.*

Definicija 4. Neka je funkcija $f(z)$ jednoznačno definisana i neprekidna u svim tačkama rektificibilne krive l. Neka je kriva podeljena tačkama $z_i = l(t_i)$ $(i = 0, \cdots, n)$, kao na Slici 12, koje odgovaraju podeli

$$P : \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta.$$

Neka je $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} |z_i - z_{i-1}|$ *dijametar podele.* Ako su $\theta_i (i = 1, \cdots, n)$ proizvoljne tačke krive l koje pripadaju delu krive između tačaka z_{i-1} i z_i, izrazom



Slika 5.

$$S_\lambda(n) = \sum_{i=1}^{n} f(\theta_i)(z_i - z_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\theta_i)\Delta z_i \tag{7}$$

gde je $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$, definišemo integralnu sumu funkcije f po krivoj l. Ako postoji kompleksan broj I takav da za svaku podelu P intervala $[\alpha, \beta]$ i za svaki izbor tačaka θ_i, važi da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da važi implikacija $\lambda < \delta \Rightarrow |S_\lambda(n) - I| < \varepsilon$, tada je $\lim_{\lambda \to 0} S_\lambda(n) = I$, pri čemu I nazivamo vrednošću kompleksnog integrala funkcije f duž krive l i označavamo ga sa $\int_l f(z)\, dz$. Umesto familije proizvoljnih podela P, mogu se razmatrati samo podele ekvidistantnim tačkama i u tom slučaju integral je moguće definisati pomoću $\lim_{n\to\infty} S_\lambda(n) = I$.

Teorema 5. Neka je $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ jednoznačno definisana i neprekidna funkcija u svim tačkama rektificibilne krive l. Tada $\int_l f(z)\, dz$ postoji ako i samo ako integrali $\int_l u\, dx - v\, dy$ i $\int_l v\, dx + u\, dy$ postoje i važi veza

$$\int\limits_l f(z)\, dz = \int\limits_l u\, dx - v\, dy + i \int\limits_l v\, dx + u\, dy \tag{8}$$

Dokaz. Za proizvoljnu podelu P krive l imamo da važi $S_\lambda = S_\lambda^1 + iS_\lambda^2$ gde su

$$S_\lambda^1 = \sum_{i=0}^{n-1} [u(\theta_i^1, \theta_i^2)\Delta x_i - v(\theta_i^1, \theta_i^2)\Delta y_i],$$

$$S_\lambda^1 = \sum_{i=0}^{n-1} [u(\theta_i^1, \theta_i^2)\Delta y_i + v(\theta_i^1, \theta_i^2)\Delta x_i],$$

za $\theta = \theta_i^1 + i\theta_i^2$. Kako su prethodnim jednakostima definisane integralne sume krivoloinsjih integrala tada imamo da je $\lim_{\lambda\to 0} S_\lambda^1 = \int_l u\, dx - v\, dy$, a $\lim_{\lambda\to 0} S_\lambda^2 = \int_l u\, dy - v\, dx$, odakle sledi (8).

Nije teško uočiti da je vezu između kompleksnog integrala po krivoj i realnih krivolinsijskih integrala moguće dobiti na sledeći način.

$$\int\limits_{l} f(z)\,dz = \int\limits_{l} (u+iv)(dx + i\,dy) = \int\limits_{l} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{l} u\,dy + v\,dx.$$

1.3.2 Cauchy-Goursatove teoreme

Teorema 6. Prva Cauchy-Goursatova teorema. Neka je l prosta, deo po deo glatka kontura koja ograničava jednostruko povezanu oblast D. Ako je funkcija f regularna u svim tačkama oblasti D i krive l tada je $\int\limits_{l} f(z)\,dz = 0$.

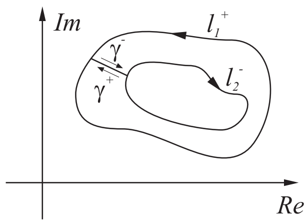
Dokaz. Kako podintegralne funkcije na desnoj strani jednakosti (8) zadovoljavaju uslove Greenove teoreme za krivolinijske integrale dobijamo da je

$$\int\limits_{l} f(z)\,dz = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\,dy + i\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx\,dy.$$

Primenjujući Cauchy-Riemannove uslove integrali na desnoj strani su 0, čime je tvrđenje dokazano.

Teorema 7. Druga Cauchy-Goursatova teorema. Neka su l_1 i l_2 proste, deo po deo glatke konture, koje ograničavaju dvostruko povezanu oblast D pri čemu je l_1 spoljašnja a l_2 unutrašnja kontura. Ako je funkcija f regularna u oblasti D i u tačkama krivih l_1 i l_2 tada je $\int\limits_{l_1^+} f(z)\,dz = \int\limits_{l_2^+} f(z)\,dz$.

Dokaz. Neka l_1^+ i l_2^+ označavaju pozitivno orjentisane krive l_1 i l_2. Spojima ove krive sa krivom γ kao na Slici 13. Kako je f regularna funkcija, zbog prethodne teoreme imamo da je



Slika 6.

$$\int\limits_{l_1^+} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma^-} f(z)\,dz + \int\limits_{l_2^-} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma^+} f(z)\,dz = 0.$$

Iz $\int\limits_{\gamma^-} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma^+} f(z)\,dz = 0$, sledi da je $\int\limits_{l_1^+} f(z)\,dz = \int\limits_{l_2^+} f(z)\,dz$, čime je teorema dokazana.

Prethodna teorema može se uopštiti za n-tostruko povezanu oblast. Pod istim pretpostavkama, smatrajući da je l spoljašnja, a $l_1, l_2, \cdots, l_n$ unutrašnje konture važi da je

$$\int\limits_{l^+} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{l_k^+} f(z)\,dz.$$

1.3.3 CAUCHYeva integralna formula

Teorema 8. CAUCHYeva integralna formula. Neka je l prosta, zatvorena, deo po deo glatka kriva, koja ograničava jednostruko povezanu oblast D. Ako je f regularna funkcija na skupu D i krivoj l, tada za svaku tačku $a \in D$ važi da je

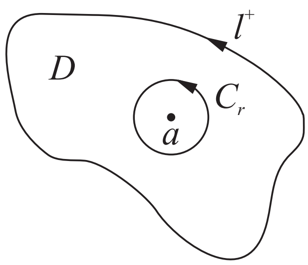
$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l^+} \frac{f(z)}{z-a}\,dz \tag{9}$$

Dokaz. Neka je $a \in D$ proizvoljna tačka i neka je $C_r = \{z \mid |z-a| = r\}$ kružnica sadržana u oblasti D, kao na Slici 14. Na osnovu Teoreme 7 važi da je

$$\int\limits_{l^+} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int\limits_{C_r^+} \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

Uvodeći u integralu na desnoj strani smenu $z = re^{i\varphi} + a \quad (dz = rie^{i\varphi}\,d\varphi)$, dobijamo da je

$$\int\limits_{l^+} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = i \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi} + a)\,d\varphi.$$



Slika 7.

Kako je funkcija f neprekidna na oblasti D, a r proizvoljan broj takav da je kružnica C_r unutar oblasti D, uzimajući graničnu vrednost kada $r \to 0$ dobijamo da je

$$\int\limits_{l^+} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = i \lim_{r\to 0} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi} + a)\,d\varphi = if(a) \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i f(a),$$

odakle sledi tvrđenje teoreme.

Teorema 9. Pod pretpostavkama prethodne teoreme važi da je

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l^+} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz.$$

Dokaz. Neka je $a \in D$ proizvoljna tačka i h dovoljno malo tako da $a+h \in D$. Zbog prethodne teoreme imamo da je $f(a+h) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l^+} \frac{f(z)}{z-(a+h)}\, dz$, odakle dobijamo da je

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l^+} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{z-(a+h)} - \frac{1}{z-a} \right) f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l^+} \frac{f(z)\, dz}{(z-a-h)(z-a)},$$

odnosno

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l^+} \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^2} + \frac{h}{2\pi i} \int\limits_{l^+} \frac{f(z)\, dz}{(z-a-h)(z-a)^2}. \tag{10}$$

Pokazaćemo da drugi integral teži ka 0 kada $h \to 0$, odakle će slediti tvrđenje. Neka ja h dovoljno malo tako da je $|h| < \frac{r}{2}$ i $a+h$ leži unutar kružnice C_r. Kako je $|z-a-h| \geq |z-a| - |h| \geq r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$ imamo da je $\left| \frac{h}{2\pi i} \int\limits_{C_r} \frac{f(z)\, dz}{(z-a-h)(z-a)^2} \right| \leq \frac{2|h|M}{r^2}$, te ovaj integral teži ka 0, kada $h \to 0$, a zbog Teoreme 7, nuli teži i poslednji integral u jednakosti (10). Uzimajući graničnu vrednost jednakosti (10) kada $h \to 0$, dobijamo tvrđenje teoreme.

Uočimo da je tvrđenje Teoreme 9 bilo moguće dokazati diferenciranjem jednakosti (9) po parametru a, ali je potrebno dokazati da je diferenciranje pod znakom integrala dozvoljeno.

Indukcijom se može pokazati da važi

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{l^+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz, \tag{11}$$

odakle sledi naredna teorema:

Teorema 10. Ako je funkcija regularna u nekoj oblasti D tada je ona beskonačno puta diferencijablina u svim tačkama te oblasti.

1.4 LAURENTov red

1.4.1 LAURENTov red funkcije

Definicija 5. Neka je $a \in \mathbf{C}$ fiksirani broj i $c_n (n \in \mathbf{Z})$ brojevi iz $\mathbf{C}$. Red oblika

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \tag{12}$$

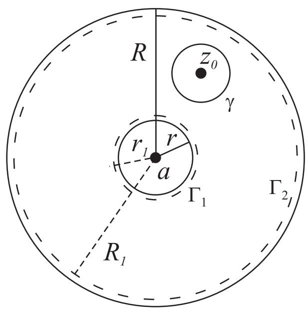
nazivamo LAURENT*ovim redom* pri čemu prvu sumu na desnoj strani jednakosti (12) nazivamo *glavnim delom,* a drugu sumu *regularnim delom* LAURENTovog reda.

Teorema 11. Razvoj funkcije u LAURENTov red. Neka je uniformna funkcija f regularna u prstenu $P = \{z \in \mathbf{C} \mid r < |z-a| < R\}$, gde je $a \in \mathbf{C}$, a $0 \le r < R \le +\infty$. Tada se vrednost funkcije u svakoj tački $z \in P$ može predstaviti LAURENTovim redom (12) pri čemu je

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l^+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \tag{13}$$

gde je l bilo koja kontura koja obuhvata tačku a i sadržana je u prstenu P. Pri tome dati red konvergira ka vrednosti funkcije u tački z.

Dokaz. Neka je z_0 fiksirana, proizvoljno izabrana tačka kružnog prstena P. Neka su $\Gamma_1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z-a| = r_1, r_1 > r\}$ i $\Gamma_2 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z-a| = R_1, R_1 < R\}$ kružnice sa centrom u a. Ove kružnice opisujemo kako bi funkcija f bila regularna i na granici i unutar kružnog prstena između njih. Neka je $\gamma = \{z \in \mathbf{C} \mid |z-z_0| = \rho\}$ pri čemu γ leži unutar prstena ograničenog krivama Γ_1 i Γ_2. Na osnovu Druge CAUCHY-GOURSATove teoreme važi da je



Slika 8.

$$\int\limits_{\Gamma_2^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \int\limits_{\Gamma_1^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz + \int\limits_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz,$$

a kako zbog CAUCHYeve integralne formule važi da je $\int\limits_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0)$ iz prethodnog dobijamo da je

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_2^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz. \tag{14}$$

Kako je za $z \in \Gamma_2$ zadovoljeno $\left|\frac{z_0-a}{z-a}\right| = \frac{|z_0-a|}{R_1} < 1$ tada je

$$\begin{aligned}\frac{f(z)}{z-z_0} &= \frac{f(z)}{z-a-(z_0-a)} = \frac{f(z)}{z-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z_0-a}{z-a}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_0-a)^n}{(z-a)^{n+1}} f(z)\end{aligned}$$

odakle sledi da je

$$\int\limits_{\Gamma_2^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int\limits_{\Gamma_2^+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \right) (z_0-a)^n. \tag{15}$$

Slično, za $z \in \Gamma_1$, zbog $\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right| = \frac{r_1}{|z_0-a|} < 1$ imamo da je

$$\begin{aligned}\frac{f(z)}{z-z_0} &= \frac{f(z)}{z-a-(z_0-a)} = -\frac{f(z)}{z_0-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{z_0-a}} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(z_0-a)^{n+1}} f(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z_0-a)^n}{(z-a)^{n+1}} f(z)\end{aligned}$$

te dobijamo da je

$$\int\limits_{\Gamma_1^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\int\limits_{\Gamma_1^+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \right) (z_0-a)^n. \tag{16}$$

Redovi u jednakostima (15) i (16) konvergiraju uniformno jer je funkcija f ograničena na Γ_1 i Γ_2 i geometrijski red uniformno konvergira, te je bilo moguće izvršiti integraciju član po član elemenata sume. Zamenom (15) i (16) u (14), s obzirom na činjenicu da se zbog Teoreme 7 integrali pod sumama mogu smatrati integralima po bilo kojoj konturi l koja obuhvata tačku a i pripada kružnom prstenu P, sledi tvrđenje teoreme.

Zbog jednakosti (14), kako je $z_0 \in P$ proizvoljna tačka, zaključujemo da je vrednost funkcije u bilo kojoj tački z prstena P jednaka vrednosti njenog Laurentovog reda u tački a. Kako su koeficijenti Laurentovog razvoja funkcije jedinstveno određeni sa (13) sledi da je Laurentov red funkcije f jedinstven.

1.4.2 Taylorov red funkcije

Teorema 12. Ako je funkcija f regularna u oblasti $D = \{z \mid |z-a| < R\}$ tada se ona može na jedinstven način predstaviti Taylorovim redom

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

Dokaz. Primenjujući dokazano u prethodnoj teoremi imamo da je

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_l f(z)(z-a)^{n-1}\, dz = 0$$

jer je podintegralna funkcija regularna unutar oblasti D. Sa druge strane, zbog jednakosti (11) imamo da je $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_l \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ čime je tvrđenje dokazano.

Obzirom na dokazanu teoremu zaključujemo da svi razvoji elementarnih funkcija koji važe u realnoj analizi važe i u kompleksnom domenu, zbog istog oblika Taylorovog reda.

1.4.3 Vrste singulariteta funkcija

Definicija 6. Tačka z_0 naziva se *izolovani singularitet* funkcije f ako postoji okolina $|z - z_0| < R$ tačke z_0 takva da je funkcija regularna u

svim tačkama te okoline izuzev u tački z_0. Postoje tri tipa izolovanih singulariteta i to:
a) Tačka z_0 je *otklonjiv singularitet* ukoliko postoji konačan $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.
b) Tačka z_0 je *pol* ukoliko je $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.
c) Tačka z_0 je *esencijalni singularitet* ukoliko $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ ne postoji.
Pojam singulariteta je u vezi sa diferencijabilnošću, dok klasifikaciju singulariteta vršimo na osnovu dodefinisanja do neprekidnosti. Pojašnjenje ove činjenice daje sledeća teorema, koja govori o vezi dodefinisanja funkcije do neprekidnosti, odnosno do diferencijabilnosti.

Teorema 13. Funkcija f regularna na skupu $0 < |z - z_0| < R$ neprekidna je u z_0 ako i samo ako je u toj tački diferencijabilna.

Dokaz. Iz diferencijabilnosti sledi neprekidnost, te je tvrđenje dovoljno dokazati samo u jednom smeru. Neka je f neprekidna u tački z_0. Neka je kružnica $|z - z_0| = r$ sadržana u datom prstenu. Pošto je funkcija neprekidna postoji $M = \max\limits_{|z-z_0|\leq r} |f(z)|$. Laurentovi koeficijenti funkcije f zadovoljavaju uslov $|c_n| \leq \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\, dz \leq \frac{M}{r^n}$, odakle sledi da je $c_{-n} = \lim\limits_{r\to 0} Mr^n = 0$, te Laurentov red ima samo regularni deo, dakle funkcija ima oblik $f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots$. Kako je $f(z_0) = c_0$ dobijamo da je $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = c_1 + c_2(z - z_0) + c_3(z - z_0)^2 + \cdots$ odakle uzimanjem granične vrednosti kada $z \to z_0$ dobijamo da je $f'(z_0) = c_1$, te je funkcija diferencijabilna u z_0.

Teorema 14. Neka je funkcija f regularna u okolini $|z - z_0| < R$ izuzev u tački z_0.
a) Tačka z_0 je otklonjiv singularitet ako i samo ako je glavni deo Laurentovog reda funkcije f u nekoj okolini tačke z_0 jednak nuli;
b) Tačka z_0 je pol ako i samo ako glavni deo Laurentovog reda sadrži konačno mnogo članova. Ako su pritom svi članovi c_{-k} za $k > n$ jednaki nuli, a $c_{-n} \neq 0$, kažemo da je z_0 pol n-tog reda;
c) Tačka z_0 je esencijalni singularitet ako i samo ako glavni deo Laurentovog reda ima beskonačno mnogo članova.

Dokaz.
a) Neka je z_0 otklonjiv singularitet funkcije f. Tada postoji $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ pa je u okolini $|z - z_0| \leq r$ tačke z_0 funkcija ograničena to jest $|f(z)| \leq M$. Kao

u dokazu prethodne teoreme pokazujemo da je $c_{-n} = 0$, te red ima samo regularan deo.
Obrnuto, ako red ima samo regularan deo tada je $\lim_{z\to z_0} f(z) = c_0$ te je tačka z_0 otklonjiv singularitet.
b) Neka je z_0 pol n-tog reda funkcije $f(z)$. Tada je z_0 nula n-tog reda funkcije $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, te je funkciju $f(z)$ moguće predstaviti u obliku $f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^n \varphi(z)}$ pri čemu je $1/\varphi(z)$ regularna u nekoj okolini $|z - z_0| < r$. Funkcija $1/\varphi(z)$ se može predstaviti TAYLORovim redom $\frac{1}{\varphi(z)} = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$, odakle sledi da LAURENTov red polazne funkcije ima oblik

$$f(z) = \frac{c_0}{(z - z_0)^n} + \frac{c_1}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{z - z_0} + c_n + c_{n+1}(z - z_0) + \cdots,$$

odnosno u glavnom delu ima samo n članova.
Obrnuto, ako LAURENTov red u okolini tačke z_0 ima oblik

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots \quad (c_{-n} \neq 0),$$

tada se funkcija $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$ može predstaviti TAYLORovim redom u okolini tačke z_0, pri čemu je $g(z_0) = c_{-n} \neq 0$. Iz navedenog dobijamo da je $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0} \frac{g(z)}{(z-z_0)^n} = \infty$.
c) Metodom isključenja mogućnosti, obzirom na a) i b), tvrđenje c) je dokazano.

Prethodna teorema daje kriterijum za određivanje prirode konačnog izolovanog singulariteta z_0. Priroda tačke ∞ funkcije $f(z)$ ekvivalentna je prirodi tačke 0 funkcije $f(\frac{1}{z})$.

1.5 Teorija ostatka

1.5.1 Pojam ostatka

Definicija 7. Neka je funkcija $f(z)$ jednoznačno definisana i regularna u okolini $|z-z_0| < R$, sem možda u tački z_0. *Ostatak (rezidum)* funkcije $f(z)$ u tački z_0, u oznaci $\mathrm{Res}\,(f; z_0)$ definišemo pomoću

$$\mathrm{Res}\,(f; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C^+} f(z)\, dz,$$

gde je C^+ pozitivno orjentisana kružnica, sa centrom u z_0, dovoljno malog poluprečnika koja se nalazi unutar okoline u kojoj je funkcija regularna.

Napomena. Ako je f regularna u z_0, zbog teoreme 6 imamo da je $\text{Res}\,(f; z_0) = 0$.

Definicija 8. Neka je $f(z)$ regularna funkcija u oblasti $R < |z| < \infty$. Ostatak funkcije f u tački $z = \infty$ definišemo pomoću

$$\text{Res}\,(f; \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C^-} f(z)\, dz,$$

gde je C^- negativno orjentisana kružnica, sa centrom u 0, dovoljno velikog poluprečnika koja se nalazi unutar oblasti na kojoj je funkcija regularna.

Teorema 15. Ostatak funkcije $f(z)$ u konačnoj tački z_0 jednak je koeficijentu c_{-1} iz LAURENTovog razvoja funkcije u tački z_0.

Dokaz. Kako LAURENTov red $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ ravnomerno konvergira na kompaktnom skupu koga čine tačke krive C imamo da je

$$\text{Res}\,(f; z_0) = \tfrac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int\limits_{C^+} (z - z_0)^n\, dz.$$

Kako je $\int\limits_{C^+} (z - z_0)^n\, dz$ različit od nule samo za $n = -1$ i ima vrednost $2\pi i$, a u ostalim slučajevima 0, dobijamo da je $\text{Res}\,(f; z_0) = c_{-1}$.

U prethodnoj teoremi data je veza pojma ostatka i koeficijenta LAURENTovog reda funkcije u konačnoj tački z_0. Postavlja se pitanje kakva je priroda ove veze ako je reč o ostatku u tački ∞. U tački ∞ LAURENTov red ima oblik

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n}$$

$$= \cdots + a_{-2}z^2 + a_{-1}z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots .$$

Vidimo da je LAURENTov red u okolini ∞ istovremeno LAURENTov red u okolini nule koji konvergira u nekom prstenu oko nule. Prva suma naziva se glavnim, a druga regularnim delom LAURENTovog reda u okolini ∞.

Teorema 16. Ostatak funkcije $f(z)$ u tački ∞ jednak je $-a_1$ gde je a_1 koeficijent iz LAURENTovog razvoja funkcije u tački ∞.

Dokaz. Kako LAURENTov red $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^{-n}$ ravnomerno konvergira ka funkciji $f(z)$, na kompaktnom skupu koga čine tačke krive C, imamo da je

$$\mathrm{Res}\,(f;\infty) = \tfrac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int\limits_{C^-} z^{-n}\,dz.$$

Kako je $\int\limits_{C^-} z^{-n}\,dz$ različit od nule samo za $n=1$ i ima vrednost $-2\pi i$, a u ostalim slučajevima 0, dobijamo da je $\mathrm{Res}\,(f;\infty) = -a_1$.

Napomena. Za razliku od konačne tačke z_0, u slučaju kada je ∞ regularna tačka funkcije $f(z)$, ostatak u njoj ne mora biti nula, pošto koeficijent a_1 pripada regularnom delu LAURENTovog razvoja funkcije u okolini ∞.

Teorema 17. Neka je $z_0 \in \mathbf{C}$ pol reda n funkcije $f(z)$. Tada važi da je

$$\mathrm{Res}\,(f;z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} ((z-z_0)^n f(z))^{(n-1)}.$$

Dokaz. Kako je z_0 pol reda n, tada LAURENTov red funkcije f u okolini tačke z_0 ima oblik

$$f(z) = \tfrac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \tfrac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots \quad (c_{-n} \neq 0).$$

Množenjem sa $(z-z_0)^n$ prethodne jednakosti i nalaženjem $(n-1)$-og izvoda dobijenog izraza, dobijamo da je

$$((z-z_0)^n f(z))^{(n-1)} = (n-1)!\,c_{-1} + n!\,c_0(z-z_0) + \cdots,$$

odakle puštajući da $z \to z_0$ dobijamo da je

$$c_{-1} = \tfrac{1}{(n-1)} \lim_{z\to z_0} ((z-z_0)^n f(z))^{(n-1)},$$

što je trebalo dokazati.

Primećujemo da prethodna teorema govori o nalaženju ostatka u konačnoj tački z_0. Ukoliko je potrebno naći ostatak u tački ∞ veoma je praktično primeniti narednu teoremu.

Teorema 18.

$$\mathrm{Res}\,(f(z);\infty) = -\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right);0\right).$$

Dokaz. Neka je $C^-: |z| = R$ negativno orjentisana kružnica, dovoljno velikog poluprečnika R, koja predstavlja okolinu tačke ∞. Uočimo da se recipročnim preslikavanjem $w = \frac{1}{z}$ ona preslikava u pozitivno orjentisanu kružnicu (pošto recipročna funkcija gornju poluravan slika u donju i obrnuto, a zbog konformnosti čuva raspored tačaka) $C^+ : |w| = \frac{1}{R}$ pri čemu je $\frac{1}{R}$ dovoljno malo. Imamo da je $\operatorname{Res}(f(z);\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^-} f(z)\,dz$, odakle uvodeći smenu $z = \frac{1}{w}$ $(dz = -\frac{1}{w^2}\,dw)$ dobijamo da je

$$\operatorname{Res}(f(z);\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+} \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) dw = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right); 0\right).$$

1.5.2 Primena teorije ostataka na izračunavanje integrala

Naredna teorema, od posebnog je značaja, pošto povezuje pojmove kompleksne integracije i teorije ostataka.

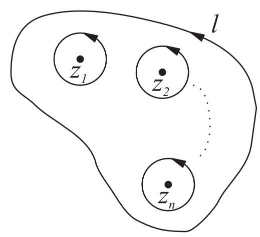
Teorema 19. Cauchy**eva teorema o rezidumima.** Neka je $f(z)$ jednoznačno definisana analitička funkcija u oblasti D, koja je regularna u svim tačkama konture l koja ograničava oblast D. Neka su $z_1, z_2, \ldots, z_n$ izolovani singulariteti funkcije koji se nalaze unutar oblasti D. Tada važi

$$\int\limits_{l^+} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f; z_k). \tag{17}$$

Dokaz. Oko svake tačke z_k opišimo kružnicu C_k, dovoljno malog poluprečnika, koja je smeštena unutar oblasti D. Zbog teoreme 7 imamo da je

$$\int\limits_{l^+} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{C_k^+} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f; z_k),$$

čime je tvrđenje teoreme dokazano.



Slika 9.

Teorema 20. Zbir svih ostataka analitičke funkcije $f(z)$ u zatvorenoj kompleksnoj ravni C^* jednak je nuli.

Dokaz. Neka su $z_1, z_2, \ldots, z_n$ konačni izolovani singulariteti funkcije $f(z)$ i neka je C kružnica takva da su svi konačni singulariteti unutar oblasti koju ona ograničava. Imamo da je

$$\operatorname{Res}(f;\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^-} f(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+} f(z)\,dz,$$

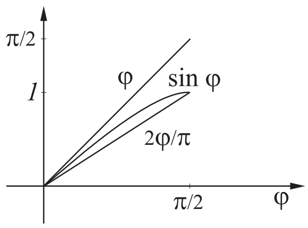
odakle, zbog Teoreme 19 dobijamo da je $\operatorname{Res}(f;\infty) = -\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f;z_k)$, odnosno $\operatorname{Res}(f;\infty)+\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f;z_k) = 0$, čime je tvrđenje teoreme dokazano.

1.6 Rešavanje realnih integrala metodama kompleksne integracije

1.6.1 Jordanove leme

Jordanova nejednakost. Za svaki broj $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ važi nejednakost

$$\frac{2\varphi}{\pi} \le \sin\varphi \le \varphi.$$



Slika 10.

Dokaz. Predstavljajući funkcije koje učestvuju u nejednakostima, u koordinatnom sistemu, zaključujemo da je nejednakost tačna.

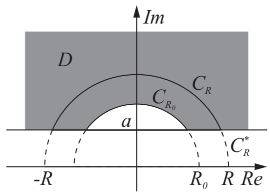
Jordanova lema I. Neka je funkcija f neprekidna na skupu

$$D = \{z \mid |z| > R_0,\ \operatorname{Im}(z) > a,\ a \ge 0\}.$$

Ako je $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ \operatorname{Im} z>0}} f(z) = 0$ tada za svako $m > 0$ važi da je

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} e^{imz} f(z)\,dz = 0,$$

gde je $C_R = \{z \mid |z| = R, \operatorname{Im}(z) > a, R \ge R_0\}$.



Slika 11.

Dokaz. Posmatrajmo krivu C_R koju ćemo dopuniti delovima iznad realne ose do prave $\operatorname{Im}(z) = a$ i označiti sa C_R^*. Uvodeći smenu $z = Re^{i\varphi}$, za $\varphi \in [0, \pi]$ dobijamo da je

$$\left|\int\limits_{C_R} e^{imz} f(z)\,dz\right| \leq \int\limits_{C_R} |e^{imz}|\,|f(z)|\,|dz| \leq \int\limits_{C_R^*} |e^{imz}|\,|f(z)|\,|dz|$$

$$= R\int\limits_0^\pi |e^{imR\cos\varphi}|\,|e^{-mR\sin\varphi}|\,|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi.$$

Kako je $|e^{imR\cos\varphi}| = 1$ i kako za svako $\varepsilon > 0$ i dovoljno velike poluprečnike R važi da je $|f(Re^{i\varphi})| < \varepsilon$, pošto je $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, imamo da je

$$\left|\int\limits_{C_R} e^{imz} f(z)\,dz\right| \leq R\varepsilon \int\limits_0^\pi e^{-mR\sin\varphi}\,d\varphi.$$

Primenjujući JORDANovu nejednakost dobijamo da je

$$|\int\limits_{C_R} e^{imz} f(z)\,dz| \leq R\varepsilon \int\limits_0^\pi e^{-\frac{2mR\varphi}{\pi}}\,d\varphi = \tfrac{\varepsilon\pi}{2m}(1 - e^{-2mR}) < \tfrac{\varepsilon\pi}{2m}.$$

Puštajući da ε teži nuli sledi tvrđenje leme.

JORDAN**ova lema II.** Neka je funkcija f neprekidna na skupu $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \alpha \leq \arg(z - z_0) \leq \beta,\ |z| > R\}$. Ako je

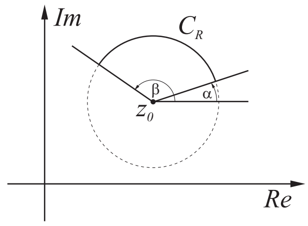
$$\lim_{\substack{z\,\to\,\infty \\ z\,\in\,D}} (z - z_0) f(z) = A$$

tada je

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)\,dz = iA(\beta - \alpha)$$

gde je

$$C_R = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| = R, \alpha \leq \arg(z - z_0) \leq \beta\}.$$



Slika 12.

Dokaz. Za dovoljno velike R i proizvoljno $\varepsilon > 0$ funkcija se može predstaviti u obliku $(z - z_0)f(z) = A + g(z)$ tako da je $|g(z)| < \varepsilon$, odakle sledi da je $f(z) = \frac{A}{z - z_0} + \frac{g(z)}{z - z_0}$. Iz poslednje jednakosti imamo da je

$$(*) \qquad \int\limits_{C_R} f(z)\,dz = A\int\limits_{C_R} \frac{dz}{z - z_0} + \int\limits_{C_R} \frac{g(z)}{z - z_0}\,dz$$

Uvodeći smenu $z = z_0 + Re^{i\varphi}$, za $\varphi \in [\alpha, \beta]$ dobijamo da je

$$\int\limits_{C_R} \tfrac{dz}{z - z_0} = i\int\limits_\alpha^\beta d\varphi = i(\beta - \alpha) \quad \text{i} \quad |\int\limits_{C_R} \tfrac{g(z)}{z - z_0}\,dz| \leq \varepsilon|\beta - \alpha|.$$

Za dovoljno velike R, puštajući da ε teži nuli, dobijamo tvrđenje leme.

JORDAN**ova lema III.** Pod pretpostavkama kao u JORDANovoj lemi II iz uslova $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D}} (z - z_0)f(z) = A$ sledi da je

$$\lim_{R\to 0} \int_{C_R} f(z)\, dz = iA(\beta - \alpha).$$

Dokaz. Tvrđenje leme dokazuje se identično kao tvrđenje JORDANove leme II pri čemu uslov "za dovoljno veliko R" zamenjujemo uslovom "za dovoljno malo R".

Glava 2

FOURIERovi redovi, integrali i transformacija

2.1 Trigonometrijski FOURIERov red

Kao motivaciju za definisanje trigonometrijskog FOURIERovog reda dokazaćemo narednu teoremu
Teorema 1. Ako red oblika

$$A+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{1}$$

konvergira uniformno ka nekoj funkciji $f(x)$ na intervalu $[-l,l]$ tada je

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad A=\frac{a_0}{2}. \tag{2}$$

Dokaz. Kako red uniformno konvergira ka $f(x)$ tada važi da je

$$f(x)=A+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3}$$

Množenjem jednakosti (3) sa $\sin\frac{k\pi x}{l}$ i integracijom od $-l$ do l, kako je $\int\limits_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l} = 0$, dobijamo da je

$$(3') \quad \int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int\limits_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx + b_n\int\limits_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Analogno, množenjem (3) sa $\cos\frac{k\pi x}{l}$, s obzirom da je $\int\limits_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l} = 0$, i integracijom od $-l$ do l dobijamo da je

$$(3'') \quad \int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int\limits_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx + b_n\int\limits_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Odredimo vrednosti integrala koji učestvuju u $(3')$ i $(3'')$. Kako su funkcije $\cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}$, $\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}$, $(k \in \mathbf{N})$ neparne, a interval integracije simetričan u odnosu na 0, njihovi integrali su 0. Posmatrajmo preostale integrale. Za $k \neq n$, imamo da je

$$\int\limits_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(n-k)x}{l} + \cos\frac{(n+k)x}{l}\right)dx = 0$$

$$\int\limits_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(n-k)x}{l} - \cos\frac{(n+k)x}{l}\right)dx = 0$$

U slučaju kada je $k = n$ imamo da je

$$\int\limits_{-l}^{l}\cos^2\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l}\left(1 + \cos\frac{2k\pi x}{l}\right)dx = l$$

$$\int\limits_{-l}^{l}\sin^2\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l}\left(1 - \cos\frac{2k\pi x}{l}\right)dx = l$$

U obe jednakosti $(3')$ i $(3'')$ samo za $k = n$ integrali pod sumama su različiti od 0, te iz $(3')$ dobijamo da je $b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$, a iz $(3'')$ dobijamo da je $a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx$. Na kraju, ako jednakost (3) integralimo od $-l$ do l dobijamo da je $A = \frac{a_0}{2}$. Ovim je dokaz završen.

Definicija 1. Neka je f funkcija definisana na intervalu $[-l, l]$, periodična sa periodom $2l$. *Trigonometrijski* FOURIER*ov red* funkcije f definiše se izrazom (1), pri čemu su koeficijenti a_n i b_n definisani sa (2).

Napomena. Lako se uočava da za parnu funkciju imamo da je $b_n = 0$, a za neparnu da je $a_n = 0$. U prvom slučaju kažemo da funkciju predstavljamo kosinusnim FOURIERovim redom, a u drugom sinusnim FOURIERovim redom.

Teorema 2. PARSEVAL**ova jednakost.** Ako FOURIERov red definisan sa (1), uniformno konvergira ka $f(x)$ tada važi jednakost

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}(f(x))^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2),$$

gde su a_0, a_n i b_n koeficijenti definisani sa (2).

Dokaz. Množenjem jednakosti (3) sa $f(x)$ i integracijom od $-l$ do l dobijamo da je

$$\begin{aligned}\int_{-l}^{l}(f(x))^2\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + b_n \int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \\ &= \frac{a_0^2}{2}\,l + l\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2),\end{aligned}$$

odakle sledi tvrđenje teoreme.

Teorema 3. BESSEL**ova nejednakost.** Ako je funkcija f neprekidna na intervalu $[-l, l]$ tada važi nejednakost

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) \le \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}(f(x))^2\,dx,$$

gde su a_0, a_n i b_n koeficijenti definisani sa (2).

Dokaz. Označimo sa $S_k(x)$ sumu

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{4}$$

Imamo da je $\int_{-l}^{l}(f(x) - S_k(x))^2\,dx \ge 0$, pošto je podintegralna funkcija pozitivna, odakle dobijamo da je

$$2\int_{-l}^{l} f(x)S_k(x)\,dx - \int_{-l}^{l}(S_k(x))^2\,dx \le \int_{-l}^{l}(f(x))^2\,dx. \tag{5}$$

Množenjem jednakosti (4) sa $2f(x)$ i integracijom od $-l$ do l dobijamo da je

$$(4') \qquad 2\int\limits_{-l}^{l} f(x)S_k(x)\,dx = 2\,l\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)\right].$$

Kvadriranjem jednakosti (4) i integracijom od $-l$ do l dobijamo da je

$$(4'') \qquad \int\limits_{-l}^{l} (S_k(x))^2\,dx = l\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)\right].$$

Zamenom $(4')$ i $(4'')$ u (5) i puštajući da $k \to +\infty$ dobijamo BESSELovu nejednakost.

Teorema 4. RIEMANNova lema. Za koeficijente trigonometrijskog FOURIERovog reda neprekidne funkcija $f(x)$, važi da je

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

Dokaz. Zbog BESSELove nejednakosti imamo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)$ konvergira, te konvergiraju i redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|b_n|$, odakle sledi tvrđenje teoreme.

Veoma važno pitanje u vezi FOURIERovih redova je da li i pod kojim uslovima FOURIERov red konvergira ka vrednosti funkcije?

Teorema 5. Uniformna konvergencija FOURIERovog reda. Neka je $f(x)$ neprekidna, periodična funkcija, sa periodom $2l$, takva da je $f'(x)$ deo po deo neprekidna funkcija. Tada FOURIERov red funkcije $f(x)$ uniformno konvergira ka $f(x)$ na intervalu $[-l,l]$.

Dokaz. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tačke prekida funkcije $f'(x)$ na intervalu $[-l,l]$. Imamo da je

$$a_n = \tfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\tfrac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{l}\left(\int\limits_{-l}^{x_1} f(x)\cos\tfrac{n\pi x}{l}\,dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\cos\tfrac{n\pi x}{l}\,dx + \cdots + \int\limits_{x_m}^{l} f(x)\cos\tfrac{n\pi x}{l}\,dx\right),$$

odakle parcijalnom integracijom dobijamo da je

$$a_n = -\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = -\frac{l}{n\pi}B_n,$$

gde su B_n koeficijenti FOURIERovog razvoja funkcije $f'(x)$. Slično pokazujemo da je $b_n = -\frac{l}{n\pi}A_n$, gde su A_n takođe FOURIERovi koeificijenti za funkciju $f'(x)$ na intervalu $[-l, l]$. Kako je

$$\left|a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right| \le |a_n| + |b_n| \le \frac{l}{\pi}\left(\frac{|B_n|}{n} + \frac{|A_n|}{n}\right),$$

da bi pokazali da FOURIERov red uniformno konvergira, dovoljno je da pokažemo da brojni red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{|B_n|}{n} + \frac{|A_n|}{n}\right)$ konvergira, te će tvrđenje teoreme važiti zbog WEIERSTRASSovog kriterijuma uniformne konvergencije funkcijskih redova. Polazeći od $\left(|B_n| - \frac{1}{n}\right)^2 \ge 0$ dobijamo da je $\frac{|B_n|}{n} \le \frac{1}{2}\left(B_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$, a kako redovi na desnoj strani poslednje nejednakosti konvergiraju zbog PARSEVALove jednakosti i konvergencije reda $\sum\frac{1}{n^2}$ sledi da i $\sum\frac{|B_n|}{n}$ takođe konvergira. Slično se pokazuje da i $\sum\frac{|A_n|}{n}$ konvergira.

Vidimo da su uslovi prethodne teoreme veoma jaki, pošto zahtevaju neprekidnost funkcije $f(x)$. Pod nešto slabijim uslovima, može se pokazati da red (1) konvergira, ali ne uniformno ka funkciji $f(x)$. Narednu teoremu navodimo bez dokaza.

Teorema 6. DIRICHLETova teorema. Neka je funkcija $f(x)$, zajedno sa svojim izvodom $f'(x)$ deo po deo neprekidna, pri čemu je broj prekida funkcije $f(x)$ najviše konačan. Tada FOURIERov red (1) u svakoj tački $x \in [-l, l]$ konvergira ka $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

FOURIERov red funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$. Neka je funkcija $f(x)$ definisana na intervalu $[a, b]$. Tada je funkciju moguće dopuniti tako da bude periodična sa periodom $2l$, gde je $l = \frac{b-a}{2}$. FOURIERov red funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ definisan je jednakošću

$$A + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{b-a},$$

gde je

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx, \quad b_n = \frac{2}{b-a}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx, \quad A = \frac{a_0}{2}.$$

Za ovako definisan FOURIERov red analogno važe sve navedene teoreme u ovom poglavlju.

FOURIERov red u kompleksnom obliku. Kako je

$$\cos\frac{n\pi x}{l} = \frac{e^{i\frac{n\pi x}{l}} + e^{-i\frac{n\pi x}{l}}}{2}, \quad \text{a} \quad \sin\frac{n\pi x}{l} = \frac{e^{i\frac{n\pi x}{l}} - e^{-i\frac{n\pi x}{l}}}{2i}$$

jednakost (1), koja definiše FOURIERov red postaje

$$(1') \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\frac{n\pi x}{l}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-i\frac{n\pi x}{l}}$$

Stavljajući da je $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$, a $c_0 = \frac{a_0}{2}$, red $(1')$ možemo predstaviti u obliku

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}},$$

što predstavlja kompleksan oblik FOURIERovog reda, pri čemu je

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\, dx.$$

2.2 FOURIERov integral i transformacija

Postavlja se pitanje šta se događa sa FOURIERovim redom ako pustimo da $l \to +\infty$. Posmatrajmo neprekidnu funkciju $f(x)$ koja je apsolutno integrabilna na $\mathbf{R}$, to jest, integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < M < +\infty$ konvergira. Neka je $l > 0$, proizvoljno odabrano. Posmatrajmo funkciju $f(x)$, definisanu na intervalu $[-l, l]$ i periodično je produžimo. Tada se ona može predstaviti FOURIERovim redom (1), odnosno

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\, dt\right)\cos\frac{n\pi x}{l} + \left(\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\, dt\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\left(\cos\frac{n\pi t}{l}\cos\frac{n\pi x}{l} + \sin\frac{n\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi(t-x)}{l}\, dt$$

Neka je $u_n = \frac{n\pi}{l}$. Imamo da je $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n = \frac{\pi}{l}$, te dobijamo da je

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\Delta u_n \int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos u_n(t-x)\,dt. \tag{6}$$

Kako $\left|\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} |f(t)|\,dt \leq \frac{M}{2l} \to 0$, kada $l \to +\infty$ i kako suma na desnoj strani jednakosti (6) predstavlja integralnu sumu funkcije $\varphi(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt$, puštajući u (6) da $l \to +\infty$, dobijamo da suma konvergira ka integralu

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} du \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt. \tag{7}$$

Koristeći adicionu formulu $\cos u(t-x) = \cos ut \cos ux + \sin ut \sin ux$ dobijamo da je integral (7) moguće predstaviti u obliku

$$\int\limits_{0}^{+\infty} (a(u)\cos ux + b(u)\sin ux)\,du, \tag{8}$$

gde je

$$a(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\,dt \quad \text{i} \quad b(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut\,dt. \tag{9}$$

Definicija 2. Neka je $f(x)$ apsolutno integrabilna funkcija na celom skupu $\mathbf{R}$. Integralom (7), odnosno (8) definišemo FOURIER*ov integral*, pri čemu su sa (9) definisani koeficijenti ovog integrala.

Ukoliko je funkcija $f(x)$ neprekidna zajedno sa izvodnom funkcijom $f'(x)$, FOURIERov integral konvergira ka vrednosti funkcije. Kao i FOURIERov red, FOURIERov integral, deo po deo neprekidne funkcije, konvergira ka $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Napomena. Može se zaključiti da Fourierov integral neparne funkcije ima oblik

$$(10) \qquad \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} F_s(u)\sin ux\,du, \quad \text{gde je} \quad F_s(u)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin ut\,dt.$$

Sa $F_s(u)$ je označen koeficijent $b(u)$ i nazivamo ga koeficijentom sinusnog Fourierovog integrala.

Ukoliko je funkcija $f(x)$ parna, njen Fourierov integral ima oblik

$$(11) \qquad \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} F_c(u)\cos ux\,du, \quad \text{gde je} \quad F_c(u)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos ut\,dt.$$

Sa $F_c(u)$ je označen koeficijent $a(u)$ i nazivamo ga koeficijentom kosinusnog Fourierovog integrala. Oznake $F_s(u)$ i $F_c(u)$ uvodimo kako bi imali oznake koje odgovaraju narednom delu teksta.

Kompleksan oblik Fourierovog integrala. Kako je funkcija $\varphi(u)$ parna po promenljivoj u, tada je Fourierov integral moguće predstaviti u obliku

$$(12) \qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} du\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt.$$

S druge strane, zbog neparnosti sinusne funkcije, imamo da je

$$(13) \qquad 0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} du\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin u(t-x)\,dt.$$

Sabiranjem (12), sa (13) pomnoženim sa $-i$, dobijamo da je

$$(14) \qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\,du\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iut}\,dt.$$

Fourierovu transformaciju funkcije $f(x)$ označavamo sa $F(u)$ i definišemo integralom

$$F(u)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iut}\,dt.$$

Iz jednakosti (14) dobijamo da je inverzna FOURIERova transformacija definisana sa

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{iux}\, du.$$

Za FOURIERove integrale važi PARSEVALova jednakost

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(u)|^2\, du. \tag{15}$$

Specijalno, za sinusni i kosinusni FOURIERov integral, važe PARSEVALove jednakosti

$$\int_0^{+\infty} (f(x))^2\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} (F_s(u))^2\, du \quad \text{i} \quad \int_0^{+\infty} (f(x))^2\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} (F_c(u))^2\, du.$$

Glava 3

LAPLACEova transformacija

3.1 Pojam LAPLACEove transformacije

Definicija 1. Pojam orginala. Funkciju $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ nazivamo *orginalom* ako su ispunjena sledeća tri uslova
(a) funkcija f je deo po deo neprekidna zajedno sa svojim izvodima dovoljno velikog reda, pri čemu na svakom konačnom intervalu može imati najviše konačno mnogo prekida i to prve vrste,
(b) funkcija f zadovoljava *uslov kauzalnosti,* odnosno

$$f(t) = 0 \text{ za svako } t < 0$$

(c) postoje pozitivni brojevi $M > 0$ i $S_0 > 0$ takvi da važi

$$|f(t)| \leq Me^{S_0 t}, \quad \text{za svako} \quad t \geq 0.$$

Pri tome se realan broj S_0 naziva *apscisa konvergencije* ili *pokazatelj rasta* funkcije f.

Definicija 2. Pojam LAPLACEove transformacije. Za $p \in \mathbf{C}$ LAPLACEovu transformaciju $F(p)$, funkcije $f(t)$ koja je original, definišemo nesvojstvenim integralom

$$(1) \qquad L(f(t)) \stackrel{\text{def}}{=} F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt.$$

Primeri. Primenjujući definiciju LAPLACEove transformacije pokazujemo da je

$$\boxed{L(1)=\frac{1}{p},\quad L(\sin t)=\frac{1}{p^2+1},\quad L(\cos t)=\frac{p}{p^2+1},\quad L(t^n)=\frac{n!}{p^{n+1}}.}$$

Funkcija iz prvog od navedenih primera praktično predstavlja LAPLACEovu transformaciju HEAVISIDEove funkcije $h(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$. Takođe, imamo da je

$$\boxed{L(\operatorname{sh} t)=\frac{1}{p^2-1},\quad L(\operatorname{ch} t)=\frac{p}{p^2-1}.}$$

za svako $p>1$.

U svim primerima koji se pojavljuju u glavi 3 smatramo da je funkcija kauzalno definisana, to jest da je jednaka nuli za svako $t<0$. Takođe, u rešenjima zadataka smatraćemo da su rešenja kauzalne funkcije. LAPLACEove transformacije dobijene u primerima smatraćemo tabličnim LAPLACEovim transformacijama.

Teorema 1. Neka je funkcija f orginal i neka je $\operatorname{Re}(p)\geq a>S_0>0$, gde je S_0 apscisa konvergencije. Tada $\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\,dt$ postoji, odnosno funkcija $F(p)$ je dobro definisana.

Dokaz. Kako je $|f(t)|\leq Me^{S_0t}$ i $\operatorname{Re}(p)\geq a>S_0$, dobijamo da je

$$\begin{aligned}|F(p)|&=|\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\,dt|\leq \int\limits_0^{+\infty}|e^{-\operatorname{Re}(p)t}||e^{-\operatorname{Im}(p)t}||f(t)|\,dt\\ &\leq M\int\limits_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re}(p)t}e^{S_0t}\,dt\leq M\int\limits_0^{+\infty} e^{-at+S_0t}\,dt\\ &=M\int\limits_0^{+\infty} e^{-(a-S_0)t}\,dt=\tfrac{1}{a-S_0}.\end{aligned}$$

Inverzna LAPLACEova transformacija. Da bi odredili *inverznu* LAPLACE*ovu transformaciju* pođimo od FOURIERove transformacije.

Sa $F(p)$ označimo LAPLACEovu transformaciju orginala $f(t)$, a sa $F(u)$ FOURIERovu transformaciju orginala $e^{-ct}f(t)$, gde je c konstanta. Imamo da je FOURIERova transformacija funkcije $e^{-ct}f(t)$ jednaka LAPLACEovoj transformaciji funkcije $f(t)$, pošto je

$$F(u) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(c+iu)t} f(t)\,dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt = F(p),$$

gde smo tačku $c + iu$ označili sa p. Na osnovu inverzne FOURIERove transformacije dobijamo da je $e^{-ct}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iut}F(u)\,du$, odnosno dobijamo da je $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{(c+iu)t}F(u)\,du$. Kako je $F(u) = F(p)$ imamo da je $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{(c+iu)t}F(p)\,du$. Uvodeći u poslednjem integralu smenu $c+iu = p$, dobijamo inverznu LAPLACEovu transformaciju

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp, \tag{2}$$

pri čemu se integracija vrši po pravoj $\mathrm{Re}\,(p) = c$, gde je c izabrano tako da se svi konačni singulariteti nalaze sa leve strane prave. Ako su $p_1, p_2, ..., p_n$ izolovani singulariteti podintegralne funkcije na osnovu CAUCHYeve teoreme o rezidumima imamo da je

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(e^{pt}F(p); p_k).$$

Integral koji određuje inverznu LAPLACEovu transformaciju, označen jednakošću (2), naziva se BROMWICHov integral.

3.2 Osnovne teoreme o LAPLACEovoj transformaciji

Teorema 2. Teorema o diferencijabilnosti LAPLACEove transformacije. Neka je funkcija f original. Tada je funkcija $F(p)$ regularna na skupu $D = \{p \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}\,(p) \geq a > S_0 > 0\}$.

Dokaz. Za proizvoljno $p \in D$, imamo da je

$$F(p+h)-F(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}(e^{-ht}-1)f(t)\,dt,$$

odakle predstavljanjem eksponencijalne funkcije redom dobijamo polaznu jednakost

$$\begin{aligned}F(p+h)-F(p)&=\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^k}{k!}h^kt^k\right)f(t)\,dt\\ &=-h\int\limits_0^{+\infty} te^{-pt}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^k}{k!}(ht)^{k-1}\right)f(t)\,dt\\ &=-h\int\limits_0^{+\infty} te^{-pt}f(t)\,dt+h\varepsilon,\end{aligned}$$

gde smo uveli oznaku $\varepsilon=h\int\limits_0^{+\infty} t^2e^{-pt}\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\tfrac{(-1)^k}{k!}(ht)^{k-2}\right)f(t)\,dt.$

Dokazaćemo da $\varepsilon\to 0$, kada $h\to 0$. Imamo da je

$$\begin{aligned}|\varepsilon|&\le |h|\,M\int\limits_0^{+\infty} t^2e^{-(a-s_0)t}\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\tfrac{(-1)^k}{(k+2)!}(ht)^k\right|dt\\ &\le |h|\,M\int\limits_0^{+\infty} t^2e^{-(a-s_0)t}\sum_{k=0}^{+\infty}\tfrac{1}{(k+2)!}(|ht|)^k\,dt\\ &\le |h|\,M\int\limits_0^{+\infty} t^2e^{-(a-s_0)t}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\tfrac{1}{k!}|ht|^k\right)dt\\ &=|h|\,M\int\limits_0^{+\infty} t^2e^{(s_0-a+|h|)t}\,dt,\end{aligned}$$

odakle parcijalnom integracijom nalazimo da je

$$|\varepsilon|\le 2M\,|h|\frac{1}{(s_0-a+|h|)^3},$$

što teži 0, kada $h\to 0$.

Deljenjem polazne jednakosti sa h dobijamo da je

$$\frac{F(p+h)-F(p)}{h}=-\int\limits_0^{+\infty} te^{-pt}f(t)\,dt+\varepsilon,$$

odakle puštajući da $h\to 0$, dobijamo da je $F'(p)=-L(tf(t))$.

Teorema 3. Neka je $F(p)$ LAPLACEova transformacija orginala $f(t)$. Tada važi da je

$$\lim_{\mathrm{Re}\,(p)\to\infty} F(p)=0.$$

Dokaz. Neka je $p=\mathrm{Re}\,(p)+i\mathrm{Im}\,(p)$ takvo da je $\mathrm{Re}\,(p)\ge a>s_0$. Imamo da je

$$|F(p)| \leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Re}\,(p)\,t}|f(t)|\,dt$$
$$\leq M \int\limits_0^{+\infty} e^{-(\mathrm{Re}\,(p)-S_0)t}\,dt = \frac{M}{\mathrm{Re}\,(p)-S_0},$$

odakle puštajući da Re $(p) \to \infty$ sledi tvrđenje teoreme.

3.3 Svojstva Laplaceove transformacije

U narednim teoremama pretpostavljamo da je Laplaceova transformacija orginala $f(x)$ i $f_i(x)$ označena sa $F(p)$ i $F_i(p)$. Takođe, u narednom delu teksta smatraćemo da je zavisno promenljiva p, nad kojom se definiše funkcija Laplaceove transformacije realan broj, kako bi precizno mogli definisati granice integracije kada integralimo sliku pri Laplaceovoj transformaciji. Naime, kada je reč o integralu čija je gornja granica ∞, funkcije $F(p)$, postavlja se pitanje kako se stiže do beskonačnosti ako je reč o kompleksnoj zavisno promenljivoj p. Naredne teoreme imaju primenu u rešavanju prvenstveno diferencijalnih i integralnih jednačina u realnom domenu, te ograničenje $p \in \mathbf{R}$ ne umanjuje opštost.

Teorema 4. Teorema linearnosti. Ako su c_1 i c_2 proizvoljne konstante tada važi da je

$$L(c_1 f_1(t) \pm c_2 f_2(t)) = c_1 F_1(p) \pm c_2 F_2(p).$$

Dokaz. Tvrđenje sledi na osnovu osobine linearnosti integrala.

Teorema 5. Teorema sličnosti. Ako je $a \in \mathbf{R}$ tada je

$$L(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Dokaz. Polazeći od definicije Laplaceove transformacije imamo da je $L(f(at)) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(at)\,dt$. Uvodeći smenu $at = u$, dobijamo da je

$$L(f(at)) = \frac{1}{a} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{p\,u}{a}} f(u)\,du = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Primeri. Primenjujući prethodnu teoremu i primere navedene nakon definicije 2, imamo da je

$$\boxed{\begin{array}{ll} L(\sin ct) = \dfrac{c}{p^2+c^2}, & L(\cos ct) = \dfrac{p}{p^2+c^2}, \\[2ex] L(\text{sh } ct) = \dfrac{c}{p^2-c^2}, & L(\text{ch } ct) = \dfrac{p}{p^2-c^2}. \end{array}}$$

Teorema 6. Teorema pomeranja. Ako je $p_0 \in \mathbf{C}$ tada je

$$L(e^{p_0 t} f(t)) = F(p - p_0).$$

Dokaz. Polazeći od definicije LAPLACEove transformacije imamo da je

$$L(e^{p_0 t} f(t)) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-p_0)t} f(t)\, dt = F(p - p_0).$$

Primeri. Primenjujući prethodnu teoremu i do sada navedene primere, imamo da je

$$\boxed{\begin{array}{ll} L(e^{bt}) = \dfrac{1}{p-b}, & L(e^{bt}t^n) = \dfrac{n!}{(p-b)^{n+1}}, \\[2ex] L(e^{bt}\cos ct) = \dfrac{p-b}{(p-b)^2+c^2}, & L(e^{bt}\sin ct) = \dfrac{c}{(p-b)^2+c^2}. \end{array}}$$

Teorema 7. Teorema kašnjenja. Ako je $\tau > 0$ tada je

$$L(f(t-\tau)) = e^{-p\tau} F(p).$$

Dokaz. Polazeći od definicije LAPLACEove transformacije imamo da je $L(f(t-\tau)) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-\tau)\, dt$. Uvodeći smenu $t - \tau = u$ sledi tvrđenje teoreme.

Teorema 8. Teorema o diferenciranju orginala. Ako je orginal $f(t)$, n puta diferencijabilna funkcija tada važi da je

$$L(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Dokaz. Imamo da je $L(f'(t)) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)\, dt$, odakle parcijalnom integracijom dobijamo da je

$$L(f'(t)) = e^{-pt}f(t)\ |_0^{+\infty} + p\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\,dt = pF(p) - f(0).$$

Induktivno dokazujemo opštu formulu za n-ti izvod funkicje.

Teorema 9. Teorema o diferenciranju slike.

$$L(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(p).$$

Dokaz. Kako integral koji definiše LAPLACEovu transformaciju orginala konvergira, diferenciranjem jednakosti (1), n puta po promenljivoj p dokazuje se tvrđenje.

Primeri. Na osnovu prethodne teoreme imamo da je

$$\boxed{\begin{array}{ll} L(t\sin ct) = \dfrac{2cp}{(p^2+c^2)^2}, & L(t\cos ct) = \dfrac{p^2-c^2}{(p^2+c^2)^2}, \\ L(t\mathrm{sh}\, ct) = \dfrac{2cp}{(p^2-c^2)^2}, & L(t\mathrm{ch}\, ct) = \dfrac{p^2+c^2}{(p^2-c^2)^2}. \end{array}}$$

Teorema 10. Teorema o integraciji orginala.

$$L\left(\int\limits_0^t f(u)\,du\right) = \frac{1}{p}F(p).$$

Dokaz. Parcijalnom integracijom dokazujemo tvrđenje. Imamo da je

$$\begin{aligned} L\left(\int\limits_0^t f(u)\,du\right) &= \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\left(\int\limits_0^t f(u)\,du\right)dt \\ &= \tfrac{-e^{-pt}}{p}\int\limits_0^t f(u)\,du\ |_0^{+\infty} + \tfrac{1}{p}\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\,dt = \tfrac{1}{p}F(p). \end{aligned}$$

Teorema 11. Teorema o integraciji slike. Ako $\int\limits_p^{+\infty} F(u)\,du$ konvergira tada je

$$L\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int\limits_p^{+\infty} F(u)\,du.$$

Dokaz. Kako je

$$\int\limits_p^{+\infty} F(u)\,du = \int\limits_p^{+\infty} du \int\limits_0^{+\infty} e^{-ut} f(t)\,dt,$$

zamenom redosleda integracija dobijamo da je

$$\int\limits_p^{+\infty} F(u)\,du = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\,dt \int\limits_p^{+\infty} e^{-ut}\,du = \int\limits_0^{+\infty} f(t) \tfrac{(-e^{-ut})}{t} \,|_p^{+\infty}\, dt$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} \tfrac{f(t)}{t}\,dt = L\big(\tfrac{f(t)}{t}\big).$$

Napomena. Puštajući u gornjoj jednakosti da $p \to 0$ dobijamo da je

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} F(u)\,du. \tag{3}$$

Teorema 12. **Laplaceova transformacija periodične funkcije.** Neka je funkcija $f(t)$ periodična, sa periodom T, na intervalu $[0, +\infty)$. Tada važi

$$F(p) = \tfrac{1}{1-e^{-pT}} \int\limits_0^{T} e^{-pt} f(t)\,dt$$

Dokaz. Imamo da je

$$L(f(t)) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{nT}^{(n+1)T} e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Uvodeći u integralima smenu $t = s+nT$, kako je $f(s) = f(s+nT)$ dobijamo da je

$$L(f(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int\limits_0^{T} e^{-p(s+nT)} f(s)\,ds = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-pnT}\right) \int\limits_0^{T} e^{-ps} f(s)\,ds$$

$$= \tfrac{1}{1-e^{-pT}} \int\limits_0^{T} e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Teorema 13. **Teorema o početnoj i krajnjoj vrednosti.** Za LAPLACEovu transformaciju orginala važi

$$a)\ \lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0) \qquad b)\ \lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to+\infty} f(t).$$

Dokaz. a) Kako na osnovu Teoreme 8 važi da je $L(f'(t)) = pF(p) - f(0)$ i kako je zbog Teoreme 3 $\lim\limits_{p\to+\infty} L(f'(t)) = 0$, puštajući da $p \to +\infty$ sledi tvrđenje.
b) Kako je $L(f'(t)) = pF(p) - f(0)$ i kako integral koji definiše LAPLACEovu transformaciju uniformno konvergira, imamo da je

$$\lim_{p\to 0}(pF(p)) - f(0)) = \lim_{p\to 0}\int_0^{+\infty} e^{-pt}f'(t)\,dt = \int_0^{+\infty}(\lim_{p\to 0} e^{-pt})f'(t)\,dt$$
$$= \int_0^{+\infty} f'(t)\,dt = \lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0).$$

Izjednačavajući početak i kraj sledi tvrđenje teoreme.

3.4 Konvolucija funkcija

Definicija 3. Neka su $f(t)$ i $g(t)$ orginali. Konvoluciju funkcija f i g, u oznaci $f(t) * g(t)$, ili $(f * g)(t)$ definišemo integralom

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau.$$

Konvolucija funkcija je komutativna, asocijativna i distributivna (u odnosu na sabiranje), operacija nad funkcijama.

Teorema 14. Neka su Laplaceove transformacije $L(f(t)) = F(p)$ i $L(g(t)) = G(p)$. Tada je

$$L(f(t) * g(t)) = F(p)G(p).$$

Dokaz. Primenom definicije Laplaceove transformacije imamo da je

$$L(f(t) * g(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau.$$

Kako za $\tau \in [0, t]$ važi da $t \in [\tau, +\infty)$, zamenjujući redosled integracije, dobijamo da je

$$L(f(t) * g(t)) = \int_0^{+\infty} g(\tau)\,d\tau \int_\tau^{+\infty} e^{-pt}f(t-\tau)\,dt.$$

Uvodeći u poslednjem integralu $t - \tau = s$ dobijamo da je

$$L(f(t) * g(t)) = \int_0^{+\infty} g(\tau)\,d\tau \int_0^{+\infty} e^{-p(s+\tau)}f(s)\,ds,$$

odnosno razdvajanjem podintegralnih funkcija dobijamo da je

$$L(f(t) * g(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-p\tau}g(\tau)\,d\tau \int_0^{+\infty} e^{-ps}f(s)\,ds = G(p)F(p).$$

U rešavanju različitih problema (rešavanje diferencijalnih, integralnih jednačina) pojavljuje se potreba da se odredi funkcija ako je poznata njena Laplaceova transformacija. Taj postupak moguće je obaviti na više različitih načina i to:
1) Rastavljanjem funkcije koja predstavlja Laplaceovu transformaciju na zbir parcijalnih razlomaka tako da svaki od njih predstavlja neku od poznatih Laplaceovih transformacija.
2) Primenjujući Bromwichov integral problem nalaženja orginala svodi se na određivanje singulariteta funkcije $F(p)$.
3) Ukoliko Laplaceova transformacija predstavlja proizvod poznatih Laplaceovih transformacija, primenjujući prethodnu teoremu orginal nalazimo kao konvoluciju odgovarajućih funkcija.