1.4 Elementi teorije polja

Definicija 1. Neka je data bilo koja funkcija: $u = u(\vec{r}) : R^3 \to R$. Tada kažemo da je dato *skalarno polje*. Prostor R^3 razmatramo kao skup vektora, pri čemu je sa $\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ označen vektor položaja tačke u R^3.

Definicija 2. Neka je $u = u(x, y, z)$ skalarno polje. Površi $u(x, y, z) = c$ se nazivaju *ekviskalarnim (nivoskim) povrǐma skalarnog polja u.*

Definicija 3. Ako je $u = u(x, y, z) : R^3 \to R$ skalarno polje i ako postoje parcijalni izvodi u'_x, u'_y, u'_z, tada vektor

$$\nabla u = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

naziva se *gradijent skalarnog polja u.*

Operator ∇ (*nabla*) je vektorski diferencijalni operator, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

Definicija 4. Ako su data tri skalarna polja: $P, Q, R : R^3 \to R$, tada ona definišu *vektorsko polje* $\vec{A} : R^3 \to R^3$ opisano jednakošću

$$\vec{A}(\vec{r}) = P(\vec{r})\,\vec{i} + Q(\vec{r})\,\vec{j} + R(\vec{r})\,\vec{k}$$

Nadalje ćemo smatrati da je vektorsko polje $\vec{A}$ zadato *komponentama*, skalarnim poljima P, Q i R, osim ukoliko nije drugačije precizirano.

Navodimo nekoliko primera vektorskig polja definisanog u ravni $u(x, y)$.

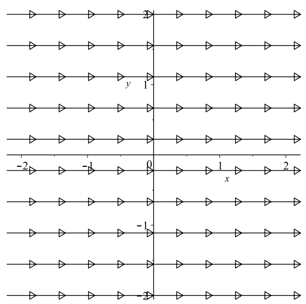
Cirkulacija vektorskog polja

Definicija 5. Ako je $\vec{A}$ vektorsko polje, tada se izraz:

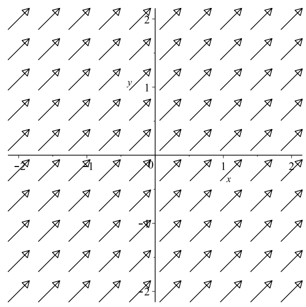
$$\int_C P dx + Q dy + R dz$$

naziva cirkulacija vektorskog polja $\vec{A}$ duž krive C.

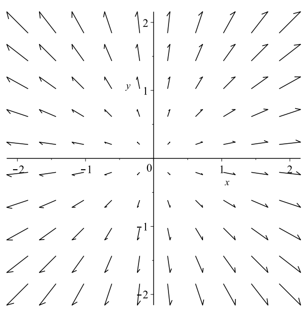
Primer 1. Rad konstantne sile $\vec{F}$ koja deluje duž vektora $\vec{s}$ je dat sa $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$. Da bismo izračunali rad promenljive sile duž krive C,



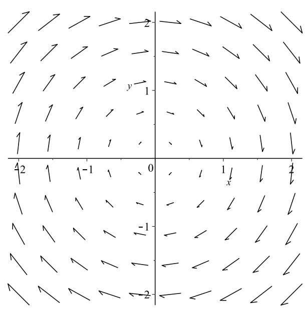
Slika 1.1: $A(x, y) = (1, 0)$



Slika 1.2: $A(x, y) = (1, 1)$



Slika 1.3: $A(x, y) = (x, y)$



Slika 1.4: $A(x, y) = (y, -x)$

podelićemo krivu na dovoljno male delove i proizvoljno biramo tačku M_i na i-tom podluku krive. Smatraćemo da je sila koja deluje na i-tom podluku približno konstantna, i to $\vec{F}(M_i)$. Ako sa T_i označimo jedinični vektor tangente krive C u tački M_i i sa Δs_i dužinu i-tog podluka, tada je rad na i-tom podluku $W_i = \vec{F}(M_i) \cdot \vec{T}_i \Delta s_i$. Ukupan rad izvršen delovanjem sile $\vec{F}$ duž krive C tada iznosi

$$\sum_i \vec{F}(M_i) \cdot \vec{T}_i(M_i) \Delta s_i.$$

Kada parametar podele krive C konvergira ka 0, gornja suma konvergira ka integralu, t.j.

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds.$$

Ako je kriva C data parametarskim jednačinama:

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

tada je $ds = |\vec{r}\,'(t)dt|$ i $\vec{T} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}$. Sada integral kojim je iskazan rad postaje:

$$W = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\, \vec{r}\,'(t) dt = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Ovde je početna tačka krive C data sa $(x(a), y(a), z(a)$, a krajnja tačka sa $(x(b), y(b), z(b)$, u odnosu na smer kretanja duž krive pod dejstvom sile $\vec{F}$. Dodatno, $d\vec{r} = \vec{r}\,'(t)dt$, tj. $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$.

Ako silu $\vec{F}$ izrazimo preko komponenti:

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

dobijamo da je rad:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

Ukoliko se vratimo na parametrizaciju krive C dobijamo način na koji možemo da izračunamo rad primenom Rimanovog integrala:

$$W = \int_a^b P(x(t), y(t), z(t))\frac{dx}{dt}dt + Q(x(t), y(t), z(t))\frac{dy}{dt}dt + R(x(t), y(t), z(t))\frac{dz}{dt}dt.$$

Fluks vektorskog polja

Definicija 6. Neka je dato vektorsko polje $\vec{A}$. Za broj Φ definisan sledećim povrinškim integralom

$$\Phi = \iint\limits_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

kažemo da je *fluks vektorskog polja* $\vec{A}$ *kroz površ* S, gde je $\vec{n}$ jedinični vektor normale površi S koji odgovara odabranoj strani površi.

Fluks još nazivamo i protok. Fluks daje odgovor na pitanje koliko materije prolazi kroz površ S u jedinici vremena.

Primer 2. Posmatrajmo protok vode kroz ravnu mrežu površi S (deo ravne površi). Neka je $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{C}$ konstantno vektorsko polje brzine kretanja vode u tački čiji je vektor položaja $\vec{r}$. Tada je količina vode koja prođe kroz mrežu S za jedinicu vremena (fluks kroz površ S) jednaka zapremini cilindra čija je osnova S i dužine ivice $|\vec{A}| = |\vec{C}|$. Zapremina ovog cilindra iznosi:

$$\Phi = mes(S) \cdot (|\vec{A}| \cos(\phi)) = \vec{A} \cdot \vec{n}\, mes(S),$$

gde je $mes(S)$ površina površi S, ϕ ugao koji zaklapa vektor brzine $\vec{A}$ sa jediničnim vektorom normale $\vec{n}$ na površ S koji odgovara odabranoj strani površi.

Pretpostavimo sada da je S površ proizvoljnog oblika, glatka i ograničena površ, $\vec{n}$ jedinični vektor normale $\vec{n}$ na površ S koji odgovara odabranoj strani površi i neka je

$$\vec{A}(M) = P(\vec{r})dx + Q(\vec{r})dy + R(\vec{r})dz$$

vektor brzine protoka vode u tački M čiji je vektor položaja $\vec{r}$, površi S (neprekidna funkcija na S). Delimo površ S na proizvoljan način na konačan broj malih delova ΔS_i i na proizvoljan način biramo tačku M_i u i-tom delu. Neka je ΔT_i deo tangentne ravni koji odgovara delu ΔS_i. Tada je fluks kroz ΔS_i približno jednak fluksu kroz ravnu površ ΔT_i koji iznosi $\vec{A}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i)\, mes \Delta T_i$. Dakle, ukupan fluks kroz površ S približno je jednak sumi

$$\sum_i \vec{A}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i)\, mes \Delta T_i.$$

Kada dijametri svih delova ΔS_i teže ka 0, granična vrednost ove sume daje ukupan fluks kroz površ S za jedinicu vremena, tj.

$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

Ako su α, β i γ uglovi koje normala $\vec{n}$ zaklapa sa jediničnim vektorima koordinatnih osa $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$, tada su koordinate jediničnog vektora normale date sa $\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$ i važi da je $\vec{A}\cdot\vec{n} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$, tj.

$$\iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS$$

Napomena. Posmatrajmo pravougaonik Π u prostoru sa ivicama dužina a i b koji pripada ravni σ koja sa xOy ravni zaklapa oštar ugao γ, pri tom ivica a pripada pravoj koja je paralelna presečnoj pravoj ravni σ i xOy ravni. Tada projekcija Π_1 pravougaonika Π na xOy ravan ima površinu $\Pi_1 = a(b\cos\gamma) = \Pi\cos\gamma$. Ovo može da se uopšti ukoliko posmatramo proizvoljni ograničeni deo ravni σ.

Površina svakog dovoljno malog dela ΔS_i približno je jednaka površini odgovarajućeg dela tangentne ravni ΔT_i. Na osnovu prethodne Napomene, imamo da površina projekcije i-tog dela tangentne ravni ΔT_i na xOy ravan, $\Delta\Pi_i$, iznosi: $\cos\gamma_i mes(\Delta T_i) = \Delta\Pi_i = \Delta x_i \Delta y_i$. Analogno važi i:

$$\cos\alpha_i mes(\Delta T_i) = \Delta y_i \Delta z_i$$
$$\cos\beta_i mes(\Delta T_i) = \Delta z_i \Delta x_i.$$

Kada se vratimo u Darbuovu sumu kojom definišemo fluks, dobijamo da je:

$$\sum_i P(M_i)\Delta y_i \Delta z_i + Q(M_i)\Delta z_i \Delta x_i + R(M_i)\Delta x_i \Delta y_i$$

i uzimajući odgovarajuću graničnu vrednost dobijamo da je fluks vektorskog polja $\vec{A}$ jednak

$$\Phi = \iint_S P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy.$$

Izračunavanje površinskih integrala II vrste - izvođenje

Posmatrajmo površ S u prostoru, zadatu parametarskim jednačinama

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \qquad (u,v) \in \Delta,$$

tj. $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in \Delta$.

Kako je vektor normale $\vec{n}$ na površ S jednak vektorskom proizvodu vektora tangenti $\vec{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}$ i $\vec{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}$, imamo da je

$$d\vec{S} = \vec{n}\, dS = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, du\, dv = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv = (A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k})\, du\, dv,$$

gde su

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

odgovarajući jakobijani.

Posmatrajmo integral

$$I = \iint\limits_S P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy,$$

možemo ga predstaviti u vektorskom obliku:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_S (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) \cdot (dy\, dz\, \vec{i} + dz\, dx\, \vec{j} + dx\, dy\, \vec{k}) \\ &= \iint\limits_S (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) \cdot d\vec{S} \\ &= \iint\limits_\Delta (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) \cdot (A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k})\, du\, dv \\ &= \iint\limits_\Delta (AP + BQ + CR)\, du\, dv. \end{aligned}$$

Izračunavanje površinskih integrala I vrste - izvođenje

Za vektroski proizvod dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ važi identitet:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2+|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2=\Big(|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin(\vec{a},\vec{b})\Big)^2+\Big(|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos(\vec{a},\vec{b})\Big)^2=|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2.$$

Primenom na vektore $\vec{r}_u$ i $\vec{r}_v$, dobijamo da važi:

$$|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|=\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2}-(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v)^2}=\sqrt{EG-F^2},$$

gde su:

$$E=\vec{r}_u^{\,2}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$G=\vec{r}_v^{\,2}=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

Kako je

$$dS=|d\vec{S}|=|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|\,du\,dv,$$

smenu promenljivih u površinskom integralu prve vrste uvodimo sa:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS=\iint\limits_\Delta f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

Definicija 7. Ako je $\vec{A}$ vektorsko polje, tada se skalarno polje:

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

naziva *divergencija vektorskog polja* $\vec{A}$.

Napomena: Važi da je $\operatorname{div}\vec{A}=\nabla\cdot\vec{A}$, gde je $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k$.

Definicija 8. Ako je $\vec{A}$ vektorsko polje, tada se vektorsko polje:

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

naziva *rotor vektorskog polja* $\vec{A}$.

Napomena: Važi da je $\operatorname{rot}\vec{A}=\nabla\times\vec{A}$, gde je $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k$.

Klasifikacija vektorskog polja $\vec{A}$:

(i) Potencijalno (bezvrtložno) polje: $\operatorname{rot}\vec{A} = 0$ i $\operatorname{div}\vec{A} \neq 0$.

(ii) Solenoidno (vrtložno) polje: $\operatorname{rot}\vec{A} \neq 0$ i $\operatorname{div}\vec{A} = 0$.

(iii) Laplace-ovo polje $\operatorname{rot}\vec{A} = 0$ i $\operatorname{div}\vec{A} = 0$.

(iv) Složeno polje: $\operatorname{rot}\vec{A} \neq 0$ i $\operatorname{div}\vec{A} \neq 0$.

Definicija 9. Funkcija u za koje važi da je $\vec{A} = \operatorname{grad} u$ potencijalno polje, naziva se *potencijalom* polja $\vec{A}$.

Teorema 1. Vektorsko polje $\vec{A}$ je potencijalno ako i samo ako ima potencijal.

Dokaz. Za potencijalno vektorsko polje $\vec{A}(\vec{r}) = P(\vec{r})\vec{i} + Q(\vec{r})\vec{j} + R(\vec{r})\vec{k}$ i njegov potencijal u mora važiti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R,$$

pa će postajati takvo skalarno polje u ako i samo ako je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z},$$

odnosno ako i samo ako je $\operatorname{rot}\vec{A} = 0$. Iz oblika divergencije $\operatorname{div}\vec{A} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ zaključujemo da je u opštem slučaju $\operatorname{div}\vec{A} \neq 0$.

Teorema 2. Ako za vektorsko polje $\vec{A}$ postoji vektorsko polje $\vec{B}$ takvo da važi $\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{B}$, tada je $\vec{A}$ solenoidno vektorsko polje.

Dokaz. Direktnim izračunavanjem dobija se da je $\operatorname{div}\vec{A} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{B} = 0$. Iz oblika $\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B}$ zaključujemo da je u opštem slučaju $\operatorname{rot}\vec{A} \neq 0$.

Važi i obrnuto tvrđenje, ako je $\operatorname{div}\vec{A} = 0$, tada je $\vec{A}$ polje rotora nekog vektorskog polja.

Teorema 3. Koordinatne Laplasovog vektorskog polja su harmonijske funkcije.

Harmonijske funkcije su one koje zadovoljavaju Laplasovu parcijalnu jednačinu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Stoksova teorema

Pod uslovima koji važe u iskazu Stoksove teoreme, važi da je

$$\oint\limits_L \vec{A}\, d\vec{r} = \iint\limits_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS.$$

Drugim rečima, cirkulacija vektora jednaka je fluksu rotora tog vektora.

Ukoliko je $\vec{A}$ potencijalno vektorsko polje, njegov rotor će biti 0, pa će i cirkulacija potencijalnog polja po zatvorenoj krivoj biti jednaka 0. Pokazuje se da cirkulacija potencijalnog vektorskog polja po krivoj C ne zavisi od puta integracije, već samo od vrednosti potencijala u na krajevima krive C.

Formula Gaus-Ostrogradskog

Pod uslovima koji važe u iskazu teoreme Gaus-Ostrogradskog, važi da je

$$\iint\limits_S \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{A}\, dx\, dy\, dz$$

Drugim rečima, fluks vektora kroz zatvorenu površ jednak je trostrukom integralu divergencije vektora po oblasti koju ta površ ograničava.

Tačke u kojima je divergencija vektorskog polja pozitivna nazivaju se *izvorima*, a one u kojima je negativna *ponorima* vektorskog polja. Ukoliko je divergencija vektorskog polja jednaka 0, tada je polje solenoidno. Iz formule Gaus-Ostrogradskog sledi da je fluks solenoidnog polja kroz zatvorenu površ jednak nuli.