ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

4.12.2004.

KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 3

1. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije: $u = xy + yz + zx$, pod uslovom $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2. Izračunati zapreminu tela ograničenog površima:

$$z = xy,\ z = 0,\ xy = 1,\ xy = 2,\ x = 2y,\ y = x \quad (x > 0, y > 0).$$

3. Izračunati površinski integral:

$$\iint\limits_{S^+} x^2\, dydz + y^2\, dzdx + z^2\, dxdy,$$

gde je S^+ spoljašnja strana kupe određene omotačem $z^2 = x^2 + y^2,\ 0 \le z \le h$ i osnovom $x^2 + y^2 \le h^2,\ z = h$ za fiksirano $h > 0$.

4. Pojam ekstremuma funkcije više promenljivih. Teorema o dovoljnim uslovima za postojanje ekstremuma funkcije dve promenljive. Iskaz i dokaz.

NAPOMENA:
- **Kolokvijum traje 2.5 sata.**
- **Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

3. Izračunati površinski integral:

$$\iint\limits_{S^+} x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy,$$

gde je S^+ spoljašnja strana kupe određene omotačem $z^2 = x^2 + y^2,\ 0 \le z \le h$ i osnovom $x^2 + y^2 \le h^2,\ z = h$ za fiksirano $h > 0$.

Rešenje. I Način. Označimo sa V unutrašnjost kupe koju obuhvata površ S. Funkcije:

$$P = x^2,\ Q = y^2,\ R = z^2 : V \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

ispunjavaju uslove za primenu teoreme Ostrogradskog. Samim tim:

$$I = \iint\limits_{S^+} x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy = \iiint\limits_{V} (2x+2y+2z)\,dxdydz.$$

Uvedimo cilidrične koordinate: $x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ z = z$ za vrednosti $(\rho,\varphi,z) \in V_1 = \{(\rho,\varphi,z) \mid 0 \le \varphi \le 2\pi\ \wedge\ \rho \le z \le h : \rho \in [0,h]\}$. Tada je $|J| = \rho$. Uvođenjem cilidričnih koordinata dobijamo:

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_{V_1} \big(2\rho\cos\varphi + 2\rho\sin\varphi + 2z\big)\rho\,dzd\rho d\varphi \\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{h}\int_{\rho}^{h} \big(\rho^2(\cos\varphi + \sin\varphi) + \rho z\big)\,dzd\rho d\varphi \\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{h} \Big(\rho^2(\cos\varphi + \sin\varphi)(h-\rho) + \rho\,\frac{h^2-\rho^2}{2}\Big)\,d\rho d\varphi \\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{h} \Big((\rho^2 h - \rho^3)(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{h^2}{2}\rho - \frac{\rho^3}{2}\Big)\,d\rho d\varphi \\
&= 2\int_0^{2\pi} \Big((\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4})(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{h^4}{4} - \frac{h^4}{8}\Big)\,d\varphi \ = \ 2\int_0^{2\pi} \frac{h^4}{8}\,d\varphi \ = \ \frac{h^4\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

II Način. Integral:

$$I = \iint\limits_{S^+} x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy,$$

rastavimo na zbir dva površinska integrala:

$$I_1 = \iint\limits_{M^-} x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$$

i

$$I_2 = \iint\limits_{B^+} x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy,$$

gde je M omotač kupe i B baza kupe. Za računanje prvog integrala uvedimo smenu promenljivih:

$$\begin{aligned} x &= x(\varphi,\rho) = \rho\cos\varphi, \\ y &= y(\varphi,\rho) = \rho\sin\varphi, \\ z &= z(\varphi,\rho) = \rho; \end{aligned}$$

za $(\varphi,\rho)\in D_{\varphi\rho} = [0,2\pi]\times[0,h]$. Tada nalazimo redom parcijalne izvode:

$$\begin{aligned} x'_{\varphi} &= -\rho\sin\varphi, & x'_{\rho} &= \cos\varphi, \\ y'_{\varphi} &= \rho\cos\varphi, & y'_{\rho} &= \sin\varphi, \\ z'_{\varphi} &= 0, & z'_{\rho} &= 1. \end{aligned}$$

Formirajmo odgovarajuće determinante:

$$A = \begin{vmatrix} y'_{\varphi} & z'_{\varphi} \\ y'_{\rho} & z'_{\rho} \end{vmatrix} = \rho\cos\varphi, \quad B = \begin{vmatrix} z'_{\varphi} & x'_{\varphi} \\ z'_{\rho} & x'_{\rho} \end{vmatrix} = \rho\sin\varphi, \quad C = \begin{vmatrix} x'_{\varphi} & y'_{\varphi} \\ x'_{\rho} & y'_{\rho} \end{vmatrix} = -\rho.$$

Samim tim, na osnovu položaja vektora normale površine $\vec{n} = (A,B,C)$, zaključujemo:

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint\limits_{M^-} x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy, \\ &= \iint\limits_{D_{\varphi\rho}} \Big((\rho\cos\varphi)^2\cdot\underbrace{(\rho\cos\varphi)}_{A} + (\rho\sin\varphi)^2\cdot\underbrace{(\rho\sin\varphi)}_{B} + (\rho)^2\cdot\underbrace{(-\rho)}_{C} \Big)\,d\varphi d\rho \\ &= \int\limits_0^{2\pi}\Big(\int\limits_0^{h} \rho^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi - 1)\,d\rho\Big)d\varphi \\ &= \frac{h^4}{4}\int\limits_0^{2\pi}(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi - 1)\,d\varphi = -\frac{h^4\pi}{2}. \end{aligned}$$

Sa druge strane za bazu B važi $z = h$ i odatle očigledno:

$$I_2 = \iint\limits_{B^+} z^2\,dxdy = \iint\limits_{B_{xy}} h^2\,dxdy = h^2\iint\limits_{B_{xy}} 1\,dxdy = h^4\pi,$$

gde je $B_{xy}\,:\,x^2+y^2 \le h^2$. Sveukupno:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{h^4\pi}{2}\,.$$

4. Pojam ekstremuma funkcije više promenljivih. Teorema o dovoljnim uslovima za postojanje ekstremuma funkcije dve promenljive. Iskaz i dokaz.

Odgovor. I. Lacković & S. Ješić: PREDAVANJA MATEMATIKA 3, prvi deo - funkcije više promenljivih, str. 21. – 26. (http://matematika3.etf.bg.ac.yu/Literatura.html).