# 1. Екстремум функција више промењивих

## i) Безусловни екстремум

**1.** Одредити локалне екстремуме следећих функција:

1° $f(x,y)=(x+y)^3-3xy^2-60y$. $\quad [f_{\min}(0,2\sqrt{5})=-80\sqrt{5};\ f_{\max}(0,-2\sqrt{5})=80\sqrt{5};\ (\pm 4,\mp 2)$ седласте тачке$]$

2° $f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x-2y$. $\quad [f_{\min}(2,2)=-4]$

3° $f(x,y)=(x+2y+3xy)e^{-(x+2y)}$. $\quad [f_{\max}(2/3,1/3)=2e^{-4/3};\ (-1,-1/2)$ седласта тачка$]$

4°* $f(x,y)=(5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$. $\quad [f_{\max}(1,3)=e^{-13};\ f_{\min}(-1/26,-3/26)=-26e^{-1/52}]$

5° $f(x,y)=2x-2y+\ln(2x-x^2-y^2)$. $\quad [f_{\max}(3/2,-1/2)=4-\ln 2]$

**Упутство.** Прво одредити област дефинисаности дате функције.

**2.** Дата је функција $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$.

i) Одредити екстремуме дате функције.

ii) Да ли се дата функција може додефинисати у $(0,0)$ тако да је та функција диференцијабилна у $(0,0)$?

$$\left[\begin{array}{l} \text{i) } f_{\min}\Big(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2e}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\Big)=-\dfrac{1}{2e};\ f_{\max}\Big(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2e}},\mp\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\Big)=\dfrac{1}{2e};\ (\pm1,0),(0,\pm1) \text{ седласте тачке} \\ \text{ii) Може. } f^*(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & x^2+y^2>0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases} \end{array}\right]$$

**3.** Испитати природу стационарних тачака следећих функција:

1° $f(x,y)=xe^{y+x\sin y}$. $\quad [(-\sqrt{2},\pi/4+2n\pi);\ (\sqrt{2},5\pi/4+2n\pi)\ n\in\mathbb{Z}$ седласте тачке$]$

2° $f(x,y)=\sin(x-y)+y^2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

$$\left[\begin{array}{l} \Big(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}+2n\pi,\dfrac{\sqrt{3}}{4}\Big), n\in\mathbb{Z}, \text{ тачке минимума} \\ \Big(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}+2n\pi,\dfrac{\sqrt{3}}{4}\Big), n\in\mathbb{Z}, \text{ седласте тачке} \end{array}\right]$$

**4.** Показати да функција $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$ има бесконачно много максимума али ниједан минимум.

**5.** Одредити екстремне вредности следећих функција:

1° $u=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$, $x>0,y>0,z>0$. $\quad [u_{\min}(1/2,1,1)=4]$

2° $u=3\ln x+2\ln y+5\ln z+\ln(22-x-y-z)$. $\quad [u_{\max}(6,4,10)=13\ln 2+3\ln 3+5\ln 5]$

**Упутство.** Прво одредити област дефинисаности функције.

3° $u=-x^2-y^3-z^2-xz+3yz-x+4z$. $\quad [u_{\max}(-5,3,9)=34;\ (-1,-1,1)$ седласта тачка$]$

## ii) Условни екстремум

**6.** Одредити локалне екстремуме функција:

1° $z=x^2+y^2$, под условом $5x^2+8xy+5y^2-9=0$. $\quad \Big[z_{\max}\Big(\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}},\mp\dfrac{3}{\sqrt{2}}\Big)=9;\ z_{\min}\Big(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)=1\Big]$

2° $z=x^2+12xy+2y^2$, под условом $4x^2+y^2=25$. $\quad [z_{\min}(\pm2,\mp3)=-50;\ z_{\max}(\pm3/2,\pm4)=425/4]$

3° $z=x^2+4\sqrt{3}\,xy+3y^2$, под условом $x^2+3y^2=1$. $\quad \left[\begin{array}{l} z_{\max}(\pm1/\sqrt{2},\pm1/\sqrt{6})=3; \\ z_{\min}(\pm1/\sqrt{2},\mp1/\sqrt{6})=-1 \end{array}\right]$

**7.** Одредити локалне екстремуме следећих функција

$1^\circ$ $u = x - 2y + 2z$, под условом $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. $[u_{\max}(1/3, -2/3, 2/3) = 3;\ u_{\min}(-1/3, 2/3, -2/3) = -3]$

$2^\circ$ $u = xyz$, под условом $xy + yz + zx = 4$. $\left[\begin{array}{l} u_{\max}(2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}) = 8/3\sqrt{3}; \\ u_{\min}(-2/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3}) = -8/3\sqrt{3} \end{array}\right]$

$3^\circ$ $u = xyz$, под условом $3xy + yz + 2zx = 18$, $x > 0, y > 0, z > 0$. $[u_{\max}(1, 2, 3) = 6]$

$4^\circ$ $u = xy^2z^3$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$, под условом $x + 2y + 3z = a$ $(a > 0)$. $[u_{\max}(a/6, a/6, a/6) = (a/6)^6]$

**Упутство.** Пошто је $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, можемо да посматрамо функцију $w = \ln u = \ln x + 2\ln y + 3\ln z$, под условом $x + 2y + 3z = a$.

$5^{\circ *}$ $u = 8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 10yz + 4zx$, под условом $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
$\left[\begin{array}{l} u_{\min}(0, \pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}) = 0; \\ u_{\max}(\pm 1/\sqrt{3}, \mp 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}) = 12; \\ (\pm 2/\sqrt{6}, \pm 1/\sqrt{6}, \mp 1/\sqrt{6}) \text{ седласте тачке} \end{array}\right]$

**8.** $1^\circ$ Одредити тачке криве $k : 21x^2 - 10\sqrt{3}xy + 31y^2 - 576 = 0$ које су најудаљеније од координатног почетка. $[(\pm 3\sqrt{3}, \pm 3)]$

**Упутство.** Посматрати функцију $d = \sqrt{x^2 + y^2}$, под условом да тачка $(x, y) \in k$, тј. имамо функцију $z = x^2 + y^2$, под условом $21x^2 - 10\sqrt{3}xy + 31y^2 - 576 = 0$.

$2^\circ$ Исти текст као у $1^\circ$ и $k : 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0$. $[(\pm 3/\sqrt{2}, \mp 3/\sqrt{2}]$

**9.** У равни $\pi : 3x - 2z = 0$ наћи тачку $D$ тако да је збир квадрата растојања тачке $D$ од тачака $A(1, 1, 1)$ и $B(2, 3, 4)$ минималан. $[D(21/13, 2, 63/26)]$

**10.** У елипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ уписати правоугаоник максималне површине. $[P_{\max} = ab/2]$

**11.** У елипсоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(a, b, c > 0)$ уписати правоугли паралелепипед максималне запремине. $\left[V_{\max} = \dfrac{8}{3\sqrt{3}}abc\right]$

**12.** У одсечак елиптичког параболоида $\dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, $z = c$ $(a, b, c > 0)$ уписати правоугли паралелепипед максималне запремине. $\left[V_{\max} = \dfrac{abc}{2}\right]$

**13.** Која тачка круга $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ има од равни $x + 2y + 3z = 12$ најмање одстојање? $[(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})]$

**14.** Одредити најкраће растојање тачке на елипсоиду $E : x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$ од равни $\pi : x + y + z = 4$. $\left[\ d_{\min} = \dfrac{1}{6}(8\sqrt{3} - \sqrt{21}\,) \text{ у тачки } (2/\sqrt{7}, 1/\sqrt{7}, 1/2\sqrt{7}\ \right]$

## 2. Криволинијски интеграли

**1.** Израчунати криволинијске интеграле прве врсте:

1° $I = \oint\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, где је $C$ круг $x^2+y^2=ax$ $(a>0)$. $[I=2a^2]$

2° $I = \int\limits_C (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$, где је $C$ део завојне линије $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $t\in[0,2\pi]$.

$$\Big[I=2\pi\Big(a^2+\frac{4}{3}b^2\pi^2\Big)\sqrt{a^2+b^2}\Big]$$

3° $I=\int\limits_C z\,\mathrm{d}s$, где је $C$ део конусне завојне линије $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$, $t\in[0,t_0]$.

$$\Big[I=\frac{1}{3}\big[(2+t_0^2)^{3/2}-2^{3/2}\big]\Big]$$

**2.** Израчунати криволинијске интеграле друге врсте:

1° $I=\oint\limits_C (x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$, где је $C$ позитивно оријентисана елипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. $[I=0]$

2° $I=\int\limits_C (y^2-z^2)\mathrm{d}x+2yz\mathrm{d}y-x^2\mathrm{d}x$, где је $C$ крива $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$, $t\in[0,1]$. Интеграција је узета у смеру рашћења параметра. $[I=1/35]$

3° $I=\int\limits_C (y-z)\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}y+(z-x)\mathrm{d}z$, где је $C$ крива $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=a^2\cos 2t$, $t\in[0,2\pi]$, смер интеграције је узет у смеру рашћења параметра. $[I=-a^2\pi]$

4° $I=\int\limits_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$, где је $C$ крива $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $t\in[0,2\pi]$, смер интеграције је узет у смеру рашћења параметра. $[I=-a^2\pi]$

5° $I=\oint\limits_C (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, где је $C$ круг $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$, $y=x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $(0<\alpha<\pi/2)$ узет у смеру супротном кретању казаљке на часовнику ако се посматра са позитивног дела $x$-осе. $[I=2a^2(\cos\alpha-\sin\alpha)\pi]$

6° $I=\oint\limits_C y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$, где је $C$ део Viviani-јеве криве $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$, $z\geq 0$ $(a>0)$ оријентисана у смеру супротном кретању казаљке на часовнику ако се посматра са дела $x$-осе за $x>a$. $\Big[I=-\dfrac{\pi}{4}a^3\Big]$

7° $I=\oint\limits_C x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$, где је $C$ крива која настаје пресеком цилиндричне површи $x^2+y^2=2x$ и равни $z=x$ позитивно оријентисана ако се посматра из тачке $(0,0,1)$. $[I=\pi]$

# 3. Двојни интеграли

## i) Израчунавање двојног интеграла

**1.** Израчунати двоструке (итериране) интеграле

1° $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^1 (x+y)\mathrm{d}y.$ [1]

2° $\int\limits_1^3 \mathrm{d}y \int\limits_2^5 \dfrac{\mathrm{d}x}{(x+2y)^2}.$ $\left[\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{14}{11}\right]$

3° $\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^a \rho^2 \sin^2\varphi \mathrm{d}\rho.$ $[\pi a^3/3]$

4° $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{x^2}^x xy^2 \mathrm{d}y.$ $[1/40]$

5° $\int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} \rho \mathrm{d}\rho.$ $\left[\dfrac{a^2}{4}(\pi+4)\right]$

**2.** Израчунати двојне интеграле

1° $I = \iint\limits_G \dfrac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $G = \big\{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\big\}.$ $[I = \pi^2/16]$

2° $I = \iint\limits_G (3x^2y^2 + x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $G = \big\{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\big\}.$ $[I = 4/3]$

3° $I = \iint\limits_G \sin^2(x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $G = \big\{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\big\}.$ $\left[I = \dfrac{1}{8}(5+\cos 4 - 2\cos 2\right]$

**Упутство.** $I = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^1 \dfrac{1-\cos 2(x+y)}{2}\mathrm{d}y$ итд.

**3.** Израчунати двојне интеграле

1° $I = \iint\limits_D xy^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је област $D$ ограничена параболом $y^2 = 2px$ и правом $x = p/2$ $(p > 0)$.

$[I = p^5/21]$

2° $I = \iint\limits_G (4-y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је област $G$ ограничена параболом $x^2 = 4y$ и правама $y = 1$, $x = 0$ у I квадранту. $[I = 68/15]$

3° $I = \iint\limits_G (x+2y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је област $G$ ограничена кривама $y = x^2$, $y^2 = x$. $[I = 9/20]$

4° $I = \iint\limits_G xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је област $G$ ограничена кругом $x^2 + y^2 = 2y$ и правом $x + y = 2$ $(y \ge 1)$.

$[I = 1/4]$

**4.** Мењајући поредак интеграције, израчунати

1° $I = \int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_{3y}^3 e^{x^2}\mathrm{d}x.$ $\left[I = \dfrac{1}{6}(e^9 - 1)\right]$

**Упутство.** $I = \iint\limits_D e^{x^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је $D : 0 \le y \le 1$, $3y \le x \le 3$ итд.

$2^\circ$ $I = \int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x \int\limits_{x^2}^{x} \dfrac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{y-x^2}}$. $[I = \pi/2]$

**5.** Доказати $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

**6.** Израчунати $I = \iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је $D$ паралелограм са страницама $y = x$, $y = x+a$, $y = a$, $y = 3a$ $(a > 0)$. $[I = 14a^4]$

**Упутство.** Приметити да је $D : a \le y \le 3a,\ y - a \le x \le y$.

**7.*** Израчунати $I = \iint\limits_D e^{\max\{9x^2,4y^2\}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ где је $D = \big\{(x,y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3\big\}$. $\left[I = \dfrac{1}{6}(e^{36}-1)\right]$

**Упутство.** $D = D_1 \cup D_2$, где је $D_1 = \big\{(x,y) : 0 \le x \le 2, 2y \le 3x\big\}$ и $D_2 = \big\{(x,y) : 0 \le y \le 3, 2y \ge 3x\big\}$ па је $I = \iint\limits_D e^{\max\{9x^2,4y^2\}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} e^{\max\{9x^2,4y^2\}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} e^{\max\{9x^2,4y^2\}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} e^{9x^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} e^{4y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ а затим слично као задатак 4.1°.

### ii) Израчунавање двојног интеграла увођењем одговарајућих смена

**8.** Увођењем поларних координата $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, израчунати двојне интеграле:

$1^\circ$ $I = \iint\limits_G \dfrac{xy\sqrt{1-x^2-y^2}}{2x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је $G = \big\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\big\}$. $\left[I = \dfrac{1}{6}\ln 2\right]$

$2^\circ$ $I = \iint\limits_G \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је $G = \big\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1, x, y \ge 0\big\}$. $\left[I = \dfrac{\pi}{8}(\pi-2)\right]$

$3^\circ$ $I = \iint\limits_D \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је $D = \big\{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 9, \dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x\sqrt{3}\big\}$. $[I = \pi^2/6]$

$4^\circ$ $I = \iint\limits_D y\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је

i) $D = \big\{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 2x, y \ge 0\big\}$; $[I = 11/24]$

ii) $D = \big\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1, x^2+y^2 \le 2x, y \ge 0\big\}$. $[I = 5/24]$

$5^\circ$ $I = \iint\limits_D x\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је $D = \big\{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4y \ \wedge\ x \le y \ \wedge\ x \ge 0\big\}$. $\left[I = \dfrac{1}{3}\Big(11 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)\right]$

$6^\circ$ $I = \iint\limits_G \left(x + \dfrac{y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је $G = \big\{(x,y) : x^2+y^2-2ax \le 0, a > 0\big\}$. $[I = a^2(a+1)\pi]$

**Упутство.** Приликом израчунавања користити интеграле

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2}, & n \text{ паран број} \\[2mm] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ непаран број} \end{cases}$$

$7^\circ$ $I = \iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је $D = \big\{(x,y) : x^2+y^2 \le 2ax\big\}$ $(a > 0)$. $\left[I = \dfrac{3\pi}{2}a^4\right]$

**9.** Израчунати $I = 4\iint\limits_D xy(x^2+y^2)e^{(xy)^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је $D = \{(x,y) : 1 \le x^2 - y^2 \le 4, 1 \le xy \le 3, x > 0, y > 0\}$. $[I = 3(e^9 - e)]$

**Упутство.** Увести смене $u = x^2 - y^2$, $v = xy$ и приметити да је $1 \le u \le 4$, $1 \le v \le 3$.

**10.** Израчунати $I = \iint\limits_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је област $D$ ограничена параболама $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$ $(p > 0)$. $\left[I = \dfrac{1}{3}(e^{2p} - 1)^2\right]$

**Упутство.** Увести смене $u = \dfrac{y^2}{x}$, $v = \dfrac{x^2}{y}$ и приметити да је $0 < u \le 2p$, $0 < v \le 2p$.

**11.** Израчунати

1° $I = \iint\limits_G x^3y^7\sqrt{1 - x^4 - y^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је $G = \{(x,y) : x^4 + y^4 \le 1, x, y \ge 0\}$. $[I = 1/210]$

**Упутство.** Увести смене $x = \rho\sqrt{\cos\varphi}$, $y = \rho\sqrt{\sin\varphi}$ и приметити да је $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \varphi \le \pi/2$.

2° $I = \iint\limits_G x^2y^2\sqrt{1 - x^3 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је $G = \{(x,y) : x^3 + y^3 \le 1, x, y \ge 0\}$. $[I = 4/135]$

**Упутство.** Увести смене $x = \rho(\cos\varphi)^{2/3}$, $y = \rho(\sin\varphi)^{2/3}$ и приметити да је $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \varphi \le \pi/2$.

## ii) Примена двојног интеграла

**12.** Израчунати површину $P$ ограничену кривама:

1° $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = x$, $y = 2x$ $(x > 0, y > 0)$; $\left[P = \dfrac{1}{2}a^2\ln 2\right]$

**Упутство.** Увести смене $u = xy$, $v = y/x$, $a^2 \le u \le 2a^2$, $1 \le v \le 2$ приликом изрчунавања интеграла.

2° $3y^2 = 25x$, $5x^2 = 9y$; $[P = 5]$

3° $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $x^3 = cy^2$, $x^3 = dy^2$ $(0 < a < b, 0 < c < d)$. $\left[P = \dfrac{1}{15}(b^5 - a^5)\left(\dfrac{1}{c^3} - \dfrac{1}{d^3}\right)\right]$

**13.** Дата је крива $k : \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3}\right)^2 = \dfrac{xy}{\sqrt{6}}$.

i) Израчунати величину површине ограничене датом кривом; $[P = \sqrt{6}/2]$

ii) Израчунати $I = \iint\limits_G xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је $G$ област у I квадранту ограничена датом кривом $k$. $[I = 1/8]$

**14.** Израчунати запремину $V$ тела ограниченог површима:

1° $z = e^{-(x^2+y^2)}$, $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$; $[V = \pi(1 - e^{-R^2})]$

**Упутство.** $V = \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

2° $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)^2 + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(a, b, c > 0)$ и координатним равнима $x = 0, y = 0, z = 0$ у I октанту; $\left[V = \dfrac{1}{3}abc\right]$

3° $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 + \dfrac{z}{c} = 1$ $(a, b, c > 0)$ $z = 0$; $\left[V = \dfrac{2\pi}{3}abc\right]$

4° $z = 1 - x^2 - y^2$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, $z = 0$ у I октанту; $[V = 88/105]$

5° $z = 1 - 2x^2 - 3y^2$, $z = 0$. $\left[V = \dfrac{\pi}{2\sqrt{6}}\right]$

**15.** Израчунати површину $P$ дела површи $z=\sqrt{x^2+y^2}$ која се налази унутар цилиндричне површи $x^2+y^2=2x$. $[P=\sqrt{2}\pi]$

**16.** Израчунати величину површине $P$ коју исеца елиптички цилиндар $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a\geq b>0)$ на сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$. $[P=8a^2\arcsin(b/a)]$

**17.** Наћи површину $P$ дела површи сфере $x^2+y^2+z^2=a^2$ која се налази унутар цилиндричне површи $x^2+y^2=ay$ $(a>0)$. $\left[P=4a^2\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)\right]$

**18.** Израчунати површину дела површи цилиндра $z=x^2$ исеченог равнима $x-2y=0$, $2x-y=0$, $x=2\sqrt{2}$. $[P=13]$

**19.** Израчунати величину површине која лежи у првом октанту и припада површи $(x+y)^2+z=1$. $[P=13/12]$

**20.** Наћи површину $P$ и запремину $V$ тела које ограничавају површи $x^2+y^2=az$, $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$. $\left[P=\dfrac{\pi a^2}{6}(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1);\ V=\dfrac{5\pi a^3}{6}\right]$

## iii) Green-Riemann-ова формула

**21.** Израчунати $I=\oint\limits_C -x^2y\mathrm{d}x+xy^2\mathrm{d}y$, где је $C: x^2+y^2=a^2$ позитивно оријентисан. $\left[I=\dfrac{\pi}{2}a^4\right]$

**22.** Израчунати $I=\oint\limits_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,\mathrm{d}x+\sin 2xy\,\mathrm{d}y)$. $[I=0]$

**23.** Израчунати криволинијски интеграл

$$I=\int\limits_{\widehat{AO}}(e^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(e^x\cos y-m)\mathrm{d}y,$$

где је $\widehat{AO}$ горњи полукруг $x^2+y^2=ax$, $y\geq 0$ $(a>0)$ оријентисан од тачке $A(a,0)$ до тачке $O(0,0)$. $\left[I=\dfrac{1}{8}a^2m\pi\right]$

**24.** Израчунати

$$I=\int\limits_C (e^{x+y}\sin 2y+x+y)\mathrm{d}x+\big(e^{x+y}(2\cos 2y+\sin 2y)+2x\big)\mathrm{d}y,$$

где је $C$ крива $y=\sqrt{2x-x^2}$, интеграција се врши од тачке $A(2,0)$ до тачке $O(0,0)$. $\left[I=\dfrac{\pi}{2}-2\right]$

**25.** Израчунати криволинијски интеграл

$$I=\int\limits_{\widehat{AB}}\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3+ye^{xy}\right)\mathrm{d}x+(x+xe^{xy})\mathrm{d}y,$$

где је $\widehat{AB}$: $x^2+y^2=a^2$, $y\geq 0$, $x\geq 0$, интеграција се врши од тачке $A(a,0)$ до тачке $B(0,a)$, $(a>0)$. $\left[I=\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{a^4}{4}\right)\right]$

**26.** Израчунати

$$I=\oint\limits_C\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

где је $C: x^2+y^2=a^2$ позитивно оријентисан. $[I=-2\pi]$

# 4. Тројни интеграли

i) Израчунавање тројног интеграла

**1.** Израчунати тројне интеграле:

1° $I = \iiint\limits_D \dfrac{1}{(1+x+y+z)^3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где је област $D$ ограничена равнима $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ (област у I октанту); $\left[I = \dfrac{1}{2}\Big(\ln 2 - \dfrac{5}{8}\Big)\right]$

2° $I = \iiint\limits_G \dfrac{1}{(1+z)^3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где је област $G$ у I октанту ограничена равнима $x+y=1$, $z=x+y$, $x=0$, $y=0$, $z=0$; $\left[I = \dfrac{1}{2}(1-\ln 2)\right]$

**Упутство.** Приметити да је

$$G: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x, 0 \le z \le x+y.$$

3° $I = \iiint\limits_D xy^2z^3\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где је област $D$ ограничена површима $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$; $[I = 1/364]$

**Упутство.** $D: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, 0 \le z \le xy$.

4° $I = \iiint\limits_G \left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где је област $G$ ограничена елипсоидом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$; $\left[I = \dfrac{4}{5}\pi abc\right]$

**Упутство.** $G: -a \le x \le a$, $-b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} \le y \le b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$, $-c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}} \le z \le c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$.

5° $I = \iiint\limits_D y\cos(z+x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где је област $D$ ограничена равнима $y=0$, $z=0$, $x+z=\dfrac{\pi}{2}$ и површином $y=\sqrt{x}$. $\left[I = \dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{1}{2}\right]$

**Упутство.** $D: 0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le \sqrt{x}$, $0 \le z \le \pi/2 - x$.

**2.** Увођењем цилиндричних координата $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$, израчунати интеграле:

1° $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где је област $V$ ограничена површима $z^2=x^2+y^2$, $z=1$; $[I=\pi/6]$

2° $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где је област $V$ ограничена површима $x^2+y^2=2z$, $z=2$; $\left[I = \dfrac{16}{3}\pi\right]$

3° $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где је област $V$ ограничена површима $x^2+y^2=2z$, $4z=2+x^2+y^2$; $[I=\pi/3]$

4° $I = \displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \mathrm{d}y \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}z.$ $\left[I = \dfrac{8}{9}a^2\right]$

**Упутство.** $I = \iiint\limits_D z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где је $V: 0 \le x \le 2$, $0 \le y \le \sqrt{2x-x^2}$, $0 \le z \le a$.

**3.** Увођењем сферних координата $x=\rho\cos\varphi\cos\theta$, $y=\rho\sin\varphi\cos\theta$, $z=\rho\sin\theta$ израчунати интеграле:

1° $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где је област $V$ ограничена сфером $x^2+y^2+z^2=z$; $[I=\pi/10]$

2° $I = \iiint\limits_V xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где је област $V$ ограничена сфером $x^2+y^2+z^2=1$ и равнима $x=0$, $y=0$, $z=0$ у I октанту; $[I=1/48]$

3° $I = \iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где је $D = \big\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le z, x^2+y^2 \le z^2\big\}$;

$$\Big[I = \frac{\pi}{10}\Big(1-\frac{1}{4\sqrt{2}}\Big)\Big]$$

4° $I = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,\mathrm{d}z.$ $\Big[I = \dfrac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)\Big]$

**Упутство.** $I = \iiint\limits_V z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где је $D : 0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}$, тј. $D$ је област ограничена површима $z^2 = x^2+y^2$, $x^2+y^2+z^2=2$, у I октанту, унутар цилиндричне површи.

**4.** Израчунати $I = \iiint\limits_D \Big(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\Big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где је област $D$ огранчена елипсоидом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$. $\Big[I = \dfrac{4}{5}\pi abc\Big]$

**Упутство.** Увести уопштене сферне координате $x = a\rho\cos\varphi\cos\theta$, $y = b\rho\sin\varphi\cos\theta$, $z = c\rho\sin\theta$; тада је $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \rho \le 1$.

iii) Примена тројног интеграла

**5.** Израчунати запремину тела ограниченог површима $az = x^2+y^2$, $z = \sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$. $\Big[V = \dfrac{\pi}{6}a^3\Big]$

**Упутство.** Увести цилиндричне координате. Задатак урадити и помоћу двојног интеграла.

**6.** Израчунати запремину $V$ тела ограниченог површином:

1° $\Big(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\Big)^2 = \dfrac{x}{h}$ $(h>0)$; $\Big[V = \dfrac{a^2bc}{3h}\pi\Big]$

**Упутство.** Увести уопштене сферне координате.

2° $(x^2+y^2+z^2)^2 = aze^{-(x^2+y^2)/(x^2+y^2+z^2)}$, $(a>0)$; $\Big[V = \dfrac{\pi}{3}a^3(1-e^{-1})\Big]$

**Упутство.** Увести сферне координате.

3°* $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2)$, $(a>0)$; $\Big[V = \dfrac{a^3\pi^2}{4\sqrt{2}}\Big]$

**Упутство.** Увести сферне координате; $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\pi/4 \le \theta \le \pi/4$, $0 \le \rho \le a\sqrt{\cos 2\theta}$.

4° $\Big(x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}\Big)^2 = z.$ $[V = \pi\sqrt{2}]$

5° $\Big(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\Big)^2 = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}.$ $\Big[V = \dfrac{\pi^2}{4}abc\Big]$

**Упутство.** Увести уопштене сферне координате.

6° $x^2+y^2+z^2 = 4a^2$, $x^2+y^2 = 3az$, $(a>0)$ (област унутар параболоида). $\Big[V = \dfrac{19}{6}\pi a^3\Big]$

**Упутство.** Увести цилиндричне координате.

# 5. Површински интеграли

i) Израчунавање површинских интеграла

**1.** Израчунати површинске интеграле прве врсте:

1° $I = \iint\limits_S (yz + zx + xy)\mathrm{d}S$, где је $S$ део површи конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$ који исеца цилиндар $x^2 + y^2 = 2ax$ $(a > 0)$. $\left[I = \frac{64}{15}a^4\sqrt{2}\right]$

2° $I = \iint\limits_S (x + y + z)\mathrm{d}S$, где је $S$ површ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a \geq 0$. $[I = \pi a^3]$

3° $I = \iint\limits_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right)\mathrm{d}S$, где је $S$ део равни $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ који лежи у I октанту. $[I = 4\sqrt{61}]$

4° $I = \iint\limits_S |xyz|\mathrm{d}S$, где је $S$ део површи $z = x^2 + y^2$, $z \leq 1$. $[I = (125\sqrt{5} - 1)/420]$

5° $I = \iint\limits_S (x^2 + y^2)\mathrm{d}S$, где је $S$ руб тела $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$. $\left[I = \frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{2})\right]$

6° $I = \iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}S$, где је $S$ сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. $[I = 4\pi]$

7° $I = \iint\limits_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$, где је $S$ део површи конуса $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq h$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ су косинуси углова што их спољна нормала гради са координатним осама. $\left[I = -\frac{\pi}{2}h^4\right]$

**2.** Израчунати површинске интеграле друге врсте:

1° $I = \iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је $S$ спољна страна дела сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. $[I = 2/15]$

2° $I_1 = \iint\limits_S z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $I_2 = \iint\limits_S z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ где је $S$ спољна страна елипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
$\left[I_1 = \frac{4}{3}\pi abc;\ I_2 = 0\right]$

3° $I = \iint\limits_S x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где је $S$ горња страна дела елипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $z \geq 0$. $\left[I = \frac{2\pi}{5}a^3bc\right]$

4° $I = \iint\limits_S y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$, где је $S$ горња страна дела равни $x + y + z = a$, $(a > 0)$ који лежи у I октанту.
$[I = a^3/6]$

5° $I = \iint\limits_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где је $S$ спољна страна дела површи параболоида $z = \frac{H}{R^2}(x^2 + y^2)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \leq H$ $(H > 0)$. $\left[I = \frac{4}{15}HR^3\right]$

6° $I = \iint\limits_S \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z}$, где је $S$ спољна страна сфере $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. $[I = 2\pi a]$

## ii) Формула Gauss-Остроградског

**3.** Израчунати површинске интеграле друге врсте:

$1^\circ$ $I = \oiint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је $S$ спољна страна сфере $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$.

$[I = 4\pi a^3]$

$2^\circ$ $I = \oiint\limits_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је $S$ спољна страна сфере $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$.

$\left[I = \dfrac{8\pi}{3}r^3(a+b+c)\right]$

**Упутство.** Код израчунавања тројног интеграла користити смене $x = a+\rho\cos\rho\cos\theta$, $y = b+\rho\sin\varphi\cos\theta$, $z = c+\rho\sin\theta$, тада је $0\le\varphi\le 2\pi$, $-\pi/2\le\theta\le\pi/2$, $0\le\rho\le r$.

$3^\circ$ $I = \iint\limits_S (y-z)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (z-x)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је $S$ спољна страна конусне површи $x^2+y^2=z^2$, $0\le z\le h$ (само омотач купе). $[I=0]$

**Упутство.** Искористити $I = \iint\limits_S + \iint\limits_B - \iint\limits_B = \oiint\limits_{S\cup B} - \iint\limits_B$ где је $B: x^2+y^2\le h^2$, $z=h$ са вектором нормале $\overrightarrow{k}$. Тада је $\oiint\limits_{S\cup B} = 0$, $\iint\limits_B = \iint\limits_{x^2+y^2\le h^2} (x-y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$ пошто је на површи $B: z=h$, а одатле је $\mathrm{d}z=0$.

$4^\circ$ $I = \iint\limits_S y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (x^2+y^2)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је $S$ спољна страна површи $x^2+y^2+z^2 = 2Rx$, $z\ge 0$ $(R>0)$ (горња полусфера). $[I = 2\pi R^4]$

**Упутство.** Као у претходном задатку $I = \oiint\limits_{S\cup B} - \iint\limits_B$, где је $B: x^2+y^2\le 2Rx$, $z=0$, са вектором нормале $-\overrightarrow{k}$, тада је $\oiint\limits_{S\cup B} = \iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 2Rx\\ z\ge 0}} (2y+2z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $\iint\limits_B = -\iint\limits_{x^2+y^2\le 2Rx} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, пошто је на површи $B: z=0$.

## iii) Stokes-ова формула

**4.** Израчунати криволинијске интеграле

$1^\circ$ $I = \oint\limits_C (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$, где је $C$ елипса $x^2+y^2=a^2$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1$ $(a,h>0)$ оријентисана у супротном смеру кретања казаљке на часовнику ако се посматра са дела $x$-осе за $x>a$. $[I = -2\pi a(a+h)]$

$2^\circ$ $I = \oint\limits_C (2x-y)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (\sin z + x)\mathrm{d}z$, где је крива $C$ пресек површи $x^2+y^2=1$, $x+y+z=1$ позитивно оријентисана ако се посматра из тачке $(0,0,2)$. $[I=-2\pi]$

$3^\circ$ Решити задатак $2.6^\circ$ применом Stokes-ове формуле.

$4^\circ$ $I = \oint\limits_C (y^2+z^2)\mathrm{d}x + (z^2+y^2)\mathrm{d}y + (x^2+y^2)\mathrm{d}z$, где је $C$ позитивно оријентисана крива која настаје пресеком површи $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $z\ge 0$ и $x^2+y^2=2rx$ $(0<r<R)$ ако се посматра са позитивног дела $z$-осе. $[I = 2\pi r^2 R]$

$5^\circ$ $I = \oint\limits_C y^2\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y + z^2\,\mathrm{d}z$, где је $C$ позитивно оријентисана крива ако се посматра из тачке $(2,0,0)$ која настаје пресеком површи $x^2+z^2+y-1=0$ са координатним осама које леже у I октанту $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$. $[I = -31/30]$

**Упутство.** Применом Stokes-ове теореме, имамо $I = \iint\limits_S -2(x+y)\cos\gamma\,\mathrm{d}S = -2\iint\limits_S (x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је $S$ део површи $x^2+z^2+y-1=0$ у I октанту оријентисане спољном нормалом $\overrightarrow{n_0}$ која са позитивним делом $z$-осе гради оштар угао, стога је $I = -2\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где је $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x^2\}$ итд.

6° $I = \oint\limits_C 8y(1-x^2-z^2)^{3/2}\mathrm{d}x + xy^3\,\mathrm{d}y + \sin z\,\mathrm{d}z$, где је $C$ крива коју ограничава део елипсоида $4x^2+y^2+4z^2=4$ $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$ позитивно оријентисана ако се посматра из тачке $(2,2,2)$.

[$I = -32/5$]

**Упутство.** Применом Stokes-ове теореме, имамо

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_S \Big[-24yz(1-x^2-z^2)^{1/2}\cos\beta + \big(\underbrace{y^3 - 8(1-x^2-z^2)^{3/2}}_{=0}\big)\cos\gamma\Big]\mathrm{d}S \\ &= -24\iint\limits_S yz(1-x^2-z^2)^{1/2}\cos\beta\mathrm{d}S = -24\iint\limits_S yz(1-x^2-z^2)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\ &= -24\iint\limits_{\substack{x^2+z^2\le 1\\ x,z\ge 0}} z\cdot 2\sqrt{1-x^2-z^2}\cdot(1-x^2-z^2)^{1/2}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = -48\iint\limits_{\substack{x^2+z^2\le 1\\ x,z\ge 0}} z(1-x^2-z^2)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \quad \text{итд.} \end{aligned}$$