1. $f'_x = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{22-x-y-z}, \quad f'_y = \dfrac{2}{y} - \dfrac{1}{22-x-y-z}, \quad f'_z = \dfrac{5}{z} - \dfrac{1}{22-x-y-z}, \quad x+y+z<22$

$$\frac{3}{x} = \frac{2}{y} = \frac{5}{z}, \quad 3y=2x,\ 3z=5x,\ y=\frac{2}{3}x,\ z=\frac{5}{3}x, \quad \frac{3}{x} = \frac{1}{22-x-2x/3-5x/3}, \quad \frac{3}{x} = \frac{3}{66-10x},\ x=6$$

Испуњен је услов $6+4+10<22$, па је $A(6,4,10)$ стационарна тачка.

Довољни услови за локални екстремум

$$f''_{x^2} = -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(22-x-y-z)^2}, \quad f''_{y^2} = -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{(22-x-y-z)^2}, \quad f''_{z^2} = -\frac{5}{x^2} - \frac{1}{(22-x-y-z)^2}$$

$$f''_{xy} = f''_{yz} = f''_{zx} = -\frac{1}{(22-x-y-z)^2}$$

У тачки A је

$$f''_{x^2} = -\frac{1}{3}, \quad f''_{y^2} = -\frac{3}{8}, \quad f''_{z^2} = -\frac{3}{10}, \quad f''_{xy} = -\frac{1}{4}, \quad f''_{yz} = -\frac{1}{4}, \quad f''_{zx} = -\frac{1}{4}$$

$$H_f(A) = \begin{bmatrix} -1/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -3/8 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & -3/10 \end{bmatrix}, \quad m_1 = -\frac{1}{3} < 0,\ m_2 = \frac{1}{16} > 0,\ m_3 = -\frac{11}{1920} < 0$$

Према томе, функција f у тачки A има локални максимум, $f_{\max} = f(A) = 13\ln 2 + 3\ln 3 + 5\ln 5$

2. Označimo funkcije na sledeći način:

$$P(x,y,z) = xz,\ Q(x,y,z) = x^2y \text{ i } R(x,y,z) = y^2z,$$

pa su parcijalni izvodi

$$\frac{\partial P}{\partial x} = z,\ \frac{\partial Q}{\partial y} = x^2,\ \frac{\partial R}{\partial z} = y^2.$$

Sada je odgovarajući trojni integral

$$\iint_S = \iiint_V \left(z + x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Uvođenjem cilindričnih koordinata dobijamo

$$I = \iiint_V z\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z + \iiint_V \rho^3\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z,$$

gde je V oblast koja se nalazi između kružnog cilindra i kružnog hiperboloida u prvom oktantu do visine $z = 1$, tako da je

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\phi \int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho \int_0^{\rho^2} z\,\mathrm{d}z + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\phi \int_0^1 \rho^3\,\mathrm{d}\rho \int_0^{\rho^2} \mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^1 \rho^5\,\mathrm{d}\rho + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{6} \\ &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

3. Методама комплексне интеграције израчунати вредност реалног интеграла $I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 x}{2+\sin x}\,dx$.

<u>Решење</u>: Уведимо смену $z=e^{ix}$.

$dz=i\underbrace{e^{ix}}_{z}dx \Rightarrow dx=\frac{dz}{iz}$

$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$

$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz}$

$$\rightsquigarrow I=\int_{|z|=1}\frac{\frac{(z^2+1)^2}{4z^2}}{2+\frac{z^2-1}{2iz}}\cdot\frac{dz}{iz}=\int_{|z|=1}\frac{\frac{(z^2+1)^2}{\cancel{2}4z^2}}{\frac{4iz+z^2-1}{\cancel{2iz}}}\cdot\frac{dz}{\cancel{iz}}=\frac{1}{2}\int_{|z|=1}\underbrace{\frac{(z^2+1)^2}{z^2(z^2+4iz-1)}}_{f(z)}dz$$

Коначни изоловани сингул. ф-је f:

$z=0$ (пол 2. реда) и корени ј-не $\underbrace{z^2+4iz-1=0}$ (полови 1. реда)

$z_{1,2}=\frac{-4i\pm\sqrt{-16+4}}{2}=\frac{-4i\pm2\sqrt{3}i}{2}=(-2\pm\sqrt{3})i$

$z_1=(-2+\sqrt{3})i, \quad z_2=(-2-\sqrt{3})i$

$|z_1|=\sqrt{(-2+\sqrt{3})^2}=|-2+\sqrt{3}|=2-\sqrt{3}<1$

$|z_2|=\sqrt{(-2-\sqrt{3})^2}=|-2-\sqrt{3}|=2+\sqrt{3}>1$

$\Rightarrow$ само је z_1 унутар контуре $|z|=1$

$$\Rightarrow I\overset{\text{КТО}}{=}\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\pi i\left(\operatorname{Res}(f;0)+\operatorname{Res}(f;(-2+\sqrt{3})i)\right)$$

$$\operatorname{Res}(f;\underset{\text{пол 2. реда}}{0})=\lim_{z\to0}\left(\cancel{z^2}\cdot\frac{(z^2+1)^2}{\cancel{z^2}(z^2+4iz-1)}\right)'=\lim_{z\to0}\frac{2(z^2+1)\cdot2z(z^2+4iz-1)-(z^2+1)^2(2z+4i)}{(z^2+4iz-1)^2}=$$

$$=\frac{-4i}{1}=\underline{\underline{-4i}}$$

$$\operatorname{Res}(f;(-2+\sqrt{3})i)=\lim_{z\to(-2+\sqrt{3})i}\cancel{(z-(-2+\sqrt{3})i)}\cdot\frac{(z^2+1)^2}{z^2\underbrace{\cancel{(z-(-2+\sqrt{3})i)}(z-(-2-\sqrt{3})i)}_{=z^2+4iz-1}}=$$

$\uparrow$ пол 1. реда

$$z^2=(-2+\sqrt{3})^2 i^2=-(4-4\sqrt{3}+3)=-(7-4\sqrt{3})=4\sqrt{3}-7$$

$$=\frac{(\overbrace{4\sqrt{3}-6}^{2(2\sqrt{3}-3)})^2}{(4\sqrt{3}-7)((-2+\sqrt{3})i-(-2-\sqrt{3})i)}=\frac{4(2\sqrt{3}-3)^2}{(4\sqrt{3}-7)(\cancel{-2i}+\sqrt{3}i+\cancel{2i}+\sqrt{3}i)}=$$

$$=\frac{4(\overbrace{12-12\sqrt{3}+9}^{21-12\sqrt{3}})}{(4\sqrt{3}-7)\cdot 2\sqrt{3}i}=\frac{\overset{6}{\cancel{12}}\cancel{(7-4\sqrt{3})}^{-1}}{\cancel{(4\sqrt{3}-7)}\cdot\underset{1}{\cancel{2}}\sqrt{3}i}=\frac{-6}{\sqrt{3}i}\overset{\frac{1}{i}=-i}{=}\frac{6i}{\sqrt{3}}=\frac{\overset{2}{\cancel{6}}\sqrt{3}i}{\underset{1}{\cancel{3}}}=\underline{\underline{2\sqrt{3}i}}$$

$$\Longrightarrow I=\pi i(-4i+2\sqrt{3}i)=\pi i\,2i(\sqrt{3}-2)=\boxed{2\pi(2-\sqrt{3})}$$

$i^2=-1$

4. Развити у Фуријеов ред функцију $f(x)=(x-\pi)x(x+\pi)$ на интервалу $[-\pi,\pi]$, а затим помоћу добијеног резултата наћи суму нумеричког реда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$.

Решење: $f(x)=\underset{\text{непарна}}{x}\,\underbrace{(x^2-\pi^2)}_{\text{парна}}\longrightarrow$ непарна ф-ја $\Longrightarrow a_0=a_n=0,\ n\in\mathbb{N}$

$\Longrightarrow f(x)$ се представља синусним Фуријеовим редом

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overbrace{\underbrace{x(x^2-\pi^2)}_{\substack{=x^3-\pi^2x\\ u}}\cdot\underbrace{\sin nx\,dx}_{dv}}^{\text{парна ф-ја}\Rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}=2\int_0^{\pi}}=\frac{2}{\pi}\left(\cancel{-\frac{1}{n}x(x^2-\pi^2)\cos nx\Big|_0^{\pi}}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\underbrace{(3x^2-\pi^2)}_{u}\underbrace{\cos nx\,dx}_{dv}\right)=$$

$du=(3x^2-\pi^2)dx$, $v=-\frac{1}{n}\cos nx$

$du=6x\,dx$, $v=\frac{1}{n}\sin nx$

$$=\frac{2}{\pi n}\cdot\left(\cancel{\frac{1}{n}(3x^2-\pi^2)\sin nx\Big|_0^{\pi}}-\frac{6}{n}\int_0^{\pi}\underset{u}{x}\underbrace{\sin nx\,dx}_{dv}\right)=$$

$du=dx$, $v=-\frac{1}{n}\cos nx$

$$= -\frac{12}{\pi n^2}\Big(-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx}}_{=\frac{1}{n}\sin nx\big|_0^{\pi}=0}\Big) = \frac{12}{\cancel{\pi} n^3}\cdot\cancel{\pi}\underbrace{\cos n\pi}_{=(-1)^n} = \frac{12\cdot(-1)^n}{n^3}, \quad n\in\mathbb{N}$$

⇝ тражени Фуријеов ред ф-је f на интервалу $[-\pi,\pi]$ је

$$\boxed{12\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx}$$

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}=?$$

Парсевалова једнакост:
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\underbrace{x^2(x^2-\pi^2)^2}_{=f^2(x)}}_{\text{парна ф-ја}}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\frac{144}{n^6}}_{b_n^2}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2(x^4-2\pi^2x^2+\pi^4)\,dx=144S$$

$$\frac{2}{\pi}\Big(\frac{x^7}{7}\Big|_0^{\pi}-2\pi^2\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^{\pi}+\pi^4\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}\Big)=144S$$

$$\frac{2}{\cancel{\pi}}\Big(\frac{\pi^{\cancel{7}6}}{7}-\frac{2\pi^{\cancel{7}6}}{5}+\frac{\pi^{\cancel{7}6}}{3}\Big)=144S$$

$$1\cancel{2}\cdot\frac{15\pi^6-42\pi^6+35\pi^6}{7\cdot5\cdot3}=\cancel{144}_{72}\,S$$

$$\frac{8\pi^6}{105}=72S \implies S=\frac{1}{\cancel{72}_{9}}\cdot\frac{\cancel{8}^{1}\pi^6}{105}=\boxed{\frac{\pi^6}{945}}$$

Теоријска питања из Математике 3 / Решење
4. 2. 2023.

1. $\vec{A} = (2x(py-z),\ x^2-py,\ z^2-px^2)$

$\operatorname{div}\vec{A} = p(2y-1) \quad \{ p=0 \Rightarrow \operatorname{div}\vec{A}=0 \}$

$\operatorname{rot}\vec{A} = (0,\ -2x(1-p),\ 2x(1-p)) \quad \{ p=1 \Rightarrow \operatorname{rot}\vec{A}=\vec{0} \}$

(I) $p=0 \Rightarrow \vec{A}$ је соленоидно поље.
(II) $p=1 \Rightarrow \vec{A}$ је потенцијално поље
(III) $p\neq 0 \wedge p\neq 1 \Rightarrow \vec{A}$ је сложено поље

За $p=1 \Rightarrow \vec{A} = (2x(y-z),\ x^2-y,\ z^2-x^2)$

$u(x,y,z) = ?$ (потенцијал)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x(y-z) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= x^2-y \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= z^2-x^2 \end{aligned}\right\}$$

а) интегрецијом по x прве једнакости:
$u(x,y,z) = x^2(y-z) + \varphi(y,z)$
$\Downarrow$
б) у другу једнакост заменимо:
$\varphi(y,z) = -\frac{y^2}{2} + \theta(z)$
$\Downarrow$
в) у трећу заменимо
$\theta(z) = z^3/3 + C$

$$\boxed{u(x,y,z) = x^2(y-z) - \frac{y^2}{2} + \frac{z^3}{3} + C}$$

2. Тачно је тврђење под А). Доказ се налази у уџбенику, стр. 26, теорема 3.