Teorija polja - zadaci

1. Pokazati da je vektorsko polje:

$$\vec{f} = \big(2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z\big)$$

potencijalno i naći njegov potencijal.

Rešenje. Neposredno se proverava da za svako $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ važi:

$$\mathrm{rot}\,\vec{f} = \vec{0} \qquad \text{i} \qquad \mathrm{div}\,\vec{f} = 6\ (\neq 0).$$

Samim tim vektorsko polje $\vec{f}$ je potencijalno. Dalje, za prethodno potencijalno polje $\vec{f} : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$, potencijal jeste svaka funkcija $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ takva da važi:

$$\mathrm{grad}\, g = \vec{f}.$$

Prethodna jednakost dovodi do sistema:

$$(1)\ \frac{\partial g}{\partial x} = 2x + y + z, \qquad (2)\ \frac{\partial g}{\partial y} = x + 2y + z, \quad (3)\ \frac{\partial g}{\partial z} = x + y + 2z.$$

Iz jednačine (1) dobijalmo:

$$g = x^2 + xy + zx + a(y, z), \tag{4}$$

za neku funkciju $a = a(y, z) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$. Dalje, iz jednačina (2) i (4) dobijamo sledeću jednakost: $\dfrac{\partial a}{\partial y} = 2y + z$ i odatle:

$$a(y, z) = y^2 + yz + b(z), \tag{5}$$

za neku funkciju $b = b(z) : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Iz jednačina (4) i (5) dobijamo:

$$g = x^2 + y^2 + xy + yz + zx + b(z). \tag{6}$$

Konačno, iz jednačina (3) i (6) dobijamo diferencijalnu jednačinu:

$$b'(z) - 2z = 0, \tag{7}$$

sa opštim rešenjem:

$$b(z) = z^2 + C, \tag{8}$$

gde je C neka konstanta. Sveukupno, funkcija potencijala je oblika:

$$g = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx + C.$$

2. Ispitati prirodu vektorskog polja

$$\vec{a}(x,y,z) = (y+z, z+x, x+y),$$

a zatim odrediti cirkulaciju tog vektora duž velikog kruga sfere $x^2+y^2+z^2=25$ između tačaka $A(3,4,0)$ i $B(0,0,5)$.

Rešenje.

Nije teško uočiti da je polje LAPLACEovo pošto je $\mathrm{div}\vec{a}=0$ i $\mathrm{rot}\vec{a}=\vec{0}$. Kako vektorska funkcija zadovoljava uslove nezavisnosti krivolinijskog integrala od puta integracije i kako je potencijal datog polja $\varphi(x,y,z)=xy+yz+xz+c$ tada je tražena cirkulacija $C = \varphi(0,0,5)-\varphi(3,4,0)=-12$.

3. Data su skalarna polja $f=xyz$, $g=xy+yz+zx$. 1^0. Formirati vektorska polja $\vec{a}=\mathrm{grad}f$, $\vec{b}=\mathrm{grad}g$ i ispitati prirodu vektorskog polja $\vec{a}\times\vec{b}$. 2^0. Izračunati $\int\limits_C (\vec{a}\times\vec{b})\cdot d\vec{r}$, gde je C duž koja spaja tačke $O(0,0,0)$ i $B(1,2,3)$.

Rešenje. 1^0. Važi $\vec{a}=\mathrm{grad}\,f=(yz,zx,xy)$ i $\vec{b}=\mathrm{div}\,g=(y+z,z+x,x+y)$. Na osnovu toga formiramo vektorsko polje:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ yz & zx & xy \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = x^2(z-y)\vec{i}+y^2(x-z)\vec{j}+z^2(y-x)\vec{k}.$$

Odatle se proverava: $\mathrm{div}(\vec{a}\times\vec{b})=0$ i $\mathrm{rot}(\vec{a}\times\vec{b})=(y^2+z^2)\vec{i}+(z^2+x^2)\vec{j}+(x^2+y^2)\vec{k}\neq\vec{0}$. Samim tim polje $\vec{a}\times\vec{b}$ jeste solenoidno.

2^0. Duž OB se može prikazati u obliku $x=t$, $y=2t$, $z=3t$, gde je $t\in[0,1]$. Cirkulacija vektora $\vec{a}\times\vec{b}$ po duži OB iznosi:

$$\int\limits_C (\vec{a}\times\vec{b})\cdot d\vec{r} = \int\limits_C x^2(z-y)dx+y^2(x-z)dy+z^2(y-x)dz = 12\int\limits_0^1 t^3dt = 3.$$