Elektrotehnički Fakultet
Univerzitet u Beogradu

Rešenja zadataka iz Matematike 3

1.(15) Neka je $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ RIEMANN integrabilna funkcija. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije:

$$E(x, y, z) = \int_0^{2\pi} (f(t) - x - y\cos t - z\sin t)^2 \, dt.$$

Rešenje. Kako je podintegralna funkcija R-integrabilna sa znakom izvoda može se ući pod integral, te primenjujući LEIBNITZovu formulu dobijamo da je:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -2\int_0^{2\pi} f(t)\, dt + 4\pi x,$$
$$\frac{\partial E}{\partial y} = -2\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\, dt + 2\pi y,$$
$$\frac{\partial E}{\partial x} = -2\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\, dt + 2\pi z.$$

Izjednačavanjem ovih parcijalnih izvoda sa nulom dobijamo da je stacionarna tačka:

$$M\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, dt,\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\, dt,\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\, dt\right).$$

Kako su mešoviti parcijalni izvodi drugog reda jednaki nuli i kako je

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 4\pi,\ \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 2\pi,\ \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 2\pi,$$

tada je druga kvadratna forma pozitivno definitna, te je u tački M minimum.

3.(20) Funkcijom $f(z) = \frac{\sin z}{e^{iz}}$ preslikati oblast

$$D = \{z \in \mathbf{C} \mid \tfrac{\pi}{6} < \mathrm{Re}(z) < \tfrac{\pi}{4}\}.$$

Rešenje. Kako je $f(z) = \frac{\sin z}{e^{iz}} = -\frac{i}{2} + \frac{i}{2}\frac{1}{e^{2iz}}$, funkciju možemo predstaviti kao kompoziciju funkcija $f_1(z) = 2iz$, $f_2(z) = e^z$, $f_3(z) = \frac{1}{z}$, $f_4(z) = \frac{i}{2}z$, $f_5(z) = -\frac{i}{2} + z$. Slika koja se dobija redom svakim od preslikavanja je

$$D_1 = f_1(D) = \{z \in \mathbf{C} | \tfrac{\pi}{3} < \mathrm{Im}(z) < \tfrac{\pi}{2}\},$$
$$D_2 = f_2(D_1) = \{z \in \mathbf{C} | \arg(z) \in (\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{2})\},$$
$$D_3 = f_3(D_2) = \{z \in \mathbf{C} | \arg(z) \in (-\tfrac{\pi}{2}, -\tfrac{\pi}{3})\},$$

$$D_4 = f_4(D_3) = \{z \in \mathbf{C} | \arg(z) \in (0, \tfrac{\pi}{6})\},$$
$$f(D) = D_5 = f_5(D_4) = \{z \in \mathbf{C} | \arg(z + \tfrac{i}{2}) \in (0, \tfrac{\pi}{6})\}.$$

4.(20) Funkciju $f(x) = x^4$ predstaviti FOURIERovim redom na intervalu $[-l, l]$, gde je $l \in \mathbf{R}$ proizvoljan broj, a zatim odrediti sumu reda

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{k-1}}{k^2\pi^2}(1 - \tfrac{3}{2k^2\pi^2}).$$

Rešenje. Kako je funkciju potrebno predstaviti FOURIERovim integralom na $[-l, l]$, možemo je periodično produžiti tako da njen period bude $2l$. Imamo da je $b_n = 0$ pošto je funkcija parna i da je

$$a_0 = \tfrac{1}{l}\int_{-l}^{l} x^4\, dx = \tfrac{2l^4}{5}.$$

Odredimo koeficijente a_n. Primenjujući parcijalnu integraciju, za $u = x^4$ i $dv = \cos\frac{n\pi x}{l}$, dobijamo da je

$$a_n = \tfrac{1}{l}\int_{-l}^{l} x^4 \cos\tfrac{n\pi x}{l}\, dx = \tfrac{x^4}{n\pi}\sin\tfrac{n\pi x}{l}\,|_{-l}^{l} - \tfrac{4}{n\pi}\int_{-l}^{l} x^3 \sin\tfrac{n\pi x}{l} dx = -\tfrac{4}{n\pi}\int_{-l}^{l} x^3 \sin\tfrac{n\pi x}{l} dx.$$

Primenjujući još tri puta parcijalnu integraciju, dobijamo da je

$$a_n = \frac{8\,l^4(-1)^n}{n^2\pi^2}(1 - \frac{6}{n^2\pi^2}),$$

odakle sledi da je traženi FOURIERov red

$$\frac{l^4}{5} + 8\,l^3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}(l - \frac{6l}{n^2\pi^2}) \cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Uzimajući da je $l = \frac{1}{4}$, i kako su zadovoljeni uslovi DIRICHLETove teoreme, za $x = 0$ dobijamo da je

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2}(\frac{1}{4} - \frac{3}{2n^2\pi^2}) = \frac{1}{160}.$$

Kako je $S = S_1 + \frac{3}{4\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, s obzirom na to da je vrednost poslednje sume $\frac{\pi^2}{12}$, dobijamo da je $S = \frac{11}{160}$.

Beograd, 26.8.2004.