Odabrana poglavlja realne i kompleksne analize
Z-transformacija – zadaci

1. Ispitati da li postoji $x(n)$ čija je funkcija $X(z)$ Z-transformacija, i ako postoji, odrediti ga u zavisnosti od položaja tačke z.

$$X(z) = \frac{z+1}{z^2 - 4z + 3}$$

Rezultat:

1. $|z| > 3: \quad x(n) = \begin{cases} 0 & , \quad n \le 0 \\ 2 \cdot 3^{n-1} - 1 & , \quad n > 0 \end{cases}$

2. $1 < |z| < 3: \quad x(n) = \begin{cases} -2 \cdot 3^{n-1} & , \quad n \le 0 \\ -1 & , \quad n > 0 \end{cases}$

3. $|z| < 1: \quad x(n) = \begin{cases} -2 \cdot 3^{n-1} + 1 & , \quad n \le 0 \\ 0 & , \quad n > 0 \end{cases}$

Napomena: U oblasti konvergencije $|z| > 3$ dobijamo red koji sadrži samo članove sa pozitivnim indeksima, u oblasti konvergencije $|z| < 1$ red sadrži samo članove sa negativnim indeksima, a u oblasti konvergencije $1 < |z| < 3$ red sadrži sve članove.

2. Ispitati da li postoji $x(n)$ čija je funkcija $X(z)$ Z-transformacija, i ako postoji, odrediti ga u zavisnosti od položaja tačke z.

$$X(z) = \frac{z^2 - 5z + 6}{z^2 + 1}$$

Rezultat:

1. $|z| < 1: \quad x(n) = \begin{cases} 1 + 5 \cdot (-1)^k z^{-2k-1} & , \quad k \le -1 \\ 1 + 5 \cdot (-1)^k z^{-2k} & , \quad k \le 0 \\ 0 & , \quad k > 0 \end{cases}$

2. $|z| > 1: \quad x(n) = \begin{cases} 1 + 5 \cdot (-1)^{k-1} z^{-2k-1} & , \quad k \ge 0 \\ 1 + 5 \cdot (-1)^{k-1} z^{-2k} & , \quad k \ge 1 \\ 0 & , \quad k < 0 \end{cases}$

4. Koristeći Z-transformaciju rešiti diferencnu jednačinu:

$$x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = 0, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1,\ x(n) = 0, n < 0.$$

Rešenje: Delujemo Z-transformacijom na diferencnu jednačinu. Z-transformacija je linearna, pa važi jednačina:

$$Z(x(n+2)) - 3Z(x(n+1)) + 2Z(x(n)) = Z(0)$$

Predstavimo sve izraze preko Z-transformacije niza $x(n)$, $X(z) = Z(x(n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}$, imajući u vidu početne uslove diferencne jednačine.

$$Z(x(n+1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n+1)z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} x(n)z^{-n+1} = z\sum_{n=1}^{+\infty} x(n)z^{-n} =$$

$$= z\sum_{n=1}^{+\infty} x(n)z^{-n} + zx(0) - zx(0) = z\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} = zX(z).$$

$$Z(x(n+2)) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n+2)z^{-n} = \sum_{n=2}^{+\infty} x(n)z^{-n+2} = z^2\sum_{n=2}^{+\infty} x(n)z^{-n} =$$

$$= z^2\left[\sum_{n=2}^{+\infty} x(n)z^{-n} + z^{-1}x(1) + x(0) - z^{-1}x(1) - x(0)\right] = z^2\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} - z = z^2X(z) - z.$$

Sada jednačina postaje:

$$z^2X(z) - z - 3zX(z) + 2X(z) = 0$$

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-1)} = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

Kada primenimo inverznu Z-transformaciju na funkciju $X(z)$ dobićemo niz $x(n)$ koji je rešenje početne diferencne jednačine. Niz $x(n)$ koji je definisan diferencnom jednačinom je različit od 0 za negativne indekse n, pa će oblast konvergencije Z-trasformacije biti $|z| > 2$, zbog oblika Z-transformacije (U sumi figuriše z^{-n}.) U ovoj oblasti konvergencije funkciju $X(z)$ možemo razviti u red, i dobijamo sledeći izraz:

$$X(z) = \frac{2}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^{-n} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n+1}z^{-n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n z^{-n} - \sum_{n=1}^{+\infty} z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(2^n - 1)z^{-n}.$$

Dakle, rešenje diferencne jednačine je niz $x(n) = 2^n - 1$.