Ime i prezime: Broj indeksa:

Odsek: Sala:

Matematika 3 – Test znanja 1

Zadaci [Šifra 15142]

1. Funkcija f definisana na sledeći način

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)^2+y^2}{\sqrt{(x+2)^2+y^2+9}-3}, & (x,y) \neq (-2,0) \\ a, & (x,y) = (-2,0) \end{cases}$$

Odrediti a tako da je funkcija f neprekidna u tački $(-2,0)$.

Odgovor:

2. Ako je $z = f(u,v)$ i $u = e^x$, $v = xy$ tada je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$$

3. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $u = -\frac{2}{x} - \frac{2}{y}$ pod uslovom $x^2+y^2=1$.

Odgovor:

4. Izračunati $I = \iint\limits_D y dx\, dy$ gde je $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

Odgovor: $I =$

5. Izračunati $I = \int\limits_c -(y+yx^6)\, dx - \frac{x^7}{7}\, dy$ gde je c krug $x^2+y^2 = 2x$ pozitivno orijentisan.

Odgovor: $I =$

6. Izračunati $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz$ gde je oblast D ograničena površima $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = 1$.

Odgovor: $I =$

15 142

1. $\lim_{\substack{x\to -2\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\rho\to +0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+9}-3} = \lim_{\rho\to+0} \frac{\cancel{\rho^2}(\sqrt{\rho^2+9}-3)}{\cancel{\rho^2}} = 6$

$\underline{a=6}$

2. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = f_u\cdot e^x + f_v\cdot y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \left(\frac{\partial f_u}{\partial u}\cdot\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial f_u}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)e^x + \left(\frac{\partial f_v}{\partial u}\cdot\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial f_v}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)y + f_v$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \underline{f_{uv}\cdot x e^x + f_{vv}\,xy + f_v}$

$\lambda = \frac{1}{x^3} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt2}}$

3. $u = -\frac{2}{x} - \frac{2}{y}$ $\quad x^2+y^2=1$

$F(x,y) = -\frac{2}{x} - \frac{2}{y} + \lambda(1-x^2-y^2)$

$F_x = \frac{2}{x^2} - 2\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda x = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^3 = \frac{1}{\lambda}$

$F_y = \frac{2}{y^2} - 2\lambda y = 0 \Rightarrow y^3 = \frac{1}{\lambda}$

$\Big\} \Rightarrow x = y$

$x^2+y^2=1$ dobijamo $M_{1,2}\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}, \pm\frac{1}{\sqrt2}\right)$ $\quad \lambda_{1,2} = \pm 2\sqrt2$

$F_{xx} = -\frac{4}{x^3} - 2\lambda, \quad F_{xy}=0, \quad F_{yy} = -\frac{4}{y^3} - 2\lambda$

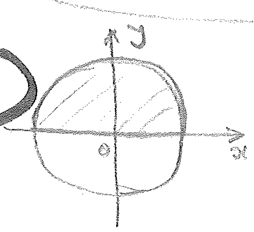
$d^2F(x,y) = -\left(\frac{2}{x^3}+2\lambda\right)dx^2 - \left(\frac{2}{y^3}+2\lambda\right)dy^2$

$d^2F\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right) = -12\sqrt2(dx^2+dy^2) < 0$ max

$\underline{u_{max}\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right) = -4\sqrt2}$

$d^2F\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right) = 12\sqrt2\,(dx^2+dy^2) > 0$ min

$\underline{u_{min}\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right) = 4\sqrt2}$

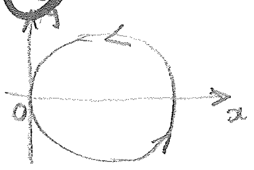
4. 

$I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\sin\varphi\;\rho\, d\rho = \int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho$

$= \left(-\cos\varphi\Big|_0^{\pi}\right)\frac{1}{3}\rho^3\Big|_0^1 = (1-(-1))\,\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\underline{I = 2/3}$

5

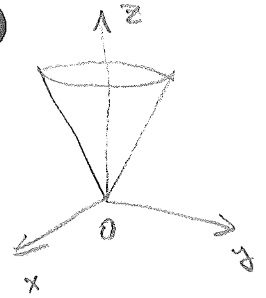


$$I = \iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^7}{7}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-(y + yx^6)\right) \right] dx\,dy$$

$$= \iint\limits_D \left(-x^6 + 1 + x^6\right) dx\,dy = \iint\limits_D dx\,dy = \pi$$

$$\underline{I = \pi.}$$

6.



$$I = \iiint\limits_{\substack{0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 1 \\ \rho \le z \le 1}} \rho \cdot \rho \; d\rho\, d\varphi\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_\rho^1 dz$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho^2 (1-\rho)\, d\rho = 2\pi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3)\, d\rho$$

$$= 2\pi \left(\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \cancel{2}\pi \frac{1}{3 \cdot \cancel{4}_2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\underline{I = \frac{\pi}{6}}$$

Ime i prezime: Broj indeksa:

Odsek: Sala:

Matematika 3 – Test znanja 1

Zadaci [Šifra 15141]

1. Funkcija f definisana na sledeći način

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+(y+1)^2}{\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}-1}, & (x,y)\neq(0,-1)\\ a, & (x,y)=(0,-1)\end{cases}$$

Odrediti a tako da je funkcija f neprekidna u tački $(0,-1)$.

Odgovor:

2. Ako je $z=f(u,v)$ i $u=e^y$, $v=xy$ tada je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$$

3. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $u=\frac{2}{x}+\frac{2}{y}$ pod uslovom $x^2+y^2=1$.

Odgovor:

4. Izračunati $I=\iint\limits_D x dx dy$ gde je $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1, x\geq 0\}$.

Odgovor: $I=$

5. Izračunati $I=\int\limits_c -\frac{y^5}{5}\,dx-(x+xy^4)\,dy$ gde je c krug $x^2+y^2=2y$ pozitivno orijentisan.

Odgovor: $I=$

6. Izračunati $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ gde je oblast D ograničena površima $z=x^2+y^2$, $z=1$.

Odgovor: $I=$

15141

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to -1}} f(x,y) = \lim\limits_{\rho\to +0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+1}-1} = \lim\limits_{\rho\to+0} \frac{\cancel{\rho^2}(\sqrt{\rho^2+1}+1)}{\cancel{\rho^2}} = 2$

$\rho = \sqrt{x^2+(y+1)^2} \to 0 \Leftrightarrow x\to 0 \wedge y \to -1$

$a = 2$

2. $z = f(u,v) \quad u = e^y, \quad v = xy$

$\frac{\partial z}{\partial x} = f_u \cdot \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}^{=0} + f_v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f_v \cdot y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y} f_v\right) y + f_v = \left(f_{uv}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + f_{vv}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right) y + f_v$

$= \left(f_{uv} e^y + f_{vv} x\right) y + f_v$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f_{uv}\, y e^y + f_{vv}\, xy + f_v$

$\lambda = \frac{1}{x^3} = \frac{1}{\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}\right)^3} = \pm 2\sqrt3$

3. $u = \frac{2}{x} + \frac{2}{y}, \quad x^2+y^2=1$

$F(x,y) = \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \lambda(x^2+y^2-1)$

$\left\{\begin{array}{l} F_x = -\frac{2}{x^2} + 2\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda x = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^3 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}} \\ F_y = -\frac{2}{y^2} + 2\lambda y = 0 \Rightarrow \lambda y = \frac{1}{y^2} \Rightarrow y^3 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}} \\ x^2+y^2 = 1 \quad \text{добијамо} \quad 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt2} \end{array}\right.$ $\Big\}\ x = y$

стационарне тачке $M\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}, \pm\frac{1}{\sqrt2}\right) \quad \lambda = \pm 2\sqrt2$

$F_{xx} = \frac{4}{x^3} + 2\lambda, \quad F_{yy} = \frac{4}{y^3} + 2\lambda \quad F_{xy} = 0$

$d^2F(x,y) = \left(\frac{4}{x^3} + 2\lambda\right) dx^2 + \left(\frac{4}{y^3}+2\lambda\right) dy^2$

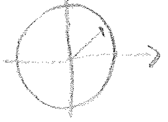
$d^2F\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right) = \left(\frac{4}{\frac{1}{2\sqrt2}} + 4\sqrt2\right) dx^2 + 12\sqrt2\, dy^2 = 12\sqrt2\,(dx^2+dy^2) > 0 \quad \min$

$u_{\min}\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right) = 4\sqrt2$

$d^2F\left(-\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right) = -12\sqrt2\,(dx^2+dy^2) < 0 \quad \max$

$u_{\max}\left(-\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right) = -4\sqrt2$

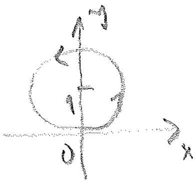
4.



$$I = \iint_D x \, dx\, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho \cos\varphi \, \rho \, d\rho = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi \cdot \frac{1}{3}\rho^3 \Big|_0^1$$

$$= \left(\sin\varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \qquad I = 2/3$$

5.

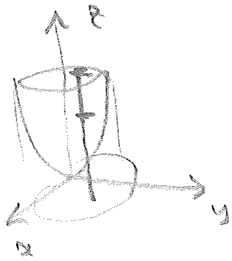


$$I = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-(x + xy^4)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y^5}{5}\right) \right] dx\, dy$$

$$= \iint_D \left(-1 - y^4 + y^4\right) dx\, dy = -\iint_D dx\, dy = -\pi$$

$$I = -\pi$$

6.



$$I = \iiint_{\substack{0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 1 \\ \rho^2 \le z \le 1}} \rho \cdot \rho \, d\rho\, d\varphi\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_{\rho^2}^1 dz$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho^2 (1 - \rho^2)\, d\rho = 2\pi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^4)\, d\rho$$

$$= 2\pi \left(\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^5}{5} \right)\Big|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = 2\pi \, \frac{2}{15} = \frac{4\pi}{15}$$

$$I = \frac{4\pi}{15}.$$

Ime i prezime: Broj indeksa:

Odsek: Sala: Broj sa spiska:

Matematika 3 – Test znanja 1

Zadaci [Šifra (101)]

1. Funkcija f

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^k}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad (k > 0)$$

je diferencijabilna u tački $(0,0)$ ako i samo ako k pripada skupu:

Odgovor: $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

2. Ako je $z = f(u,v)$ i $u = e^x$, $v = xy$ tada je

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{vv} \cdot x^2$

3. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $u = \frac{3}{x} + \frac{3}{y}$ pod uslovom $x^3 + y^3 = 2$.

Odgovor: $u_{min}(1,1) = 6$

4. Izračunati površinu oblasti ograničenu krivama $y^2 = x, y^2 = 4x, xy = 2, xy = 4$.

Odgovor: $P = \frac{4}{3}\ln 2$

5. Izračunati $I = \int\limits_c -\frac{y^3}{3}\,dx + (2x - xy^2)\,dy$ gde je c krug $x^2 + y^2 = 2x$.

Odgovor: $I = 2\pi$

6. Izračunati $\iiint\limits_D z\,dx\,dy\,dz$ gde je oblast D ograničena ravnima $x + z = 1, y = 2x, y = 0, z = 0$ u prvom oktantu.

Odgovor: $I = 1/12$

Решења

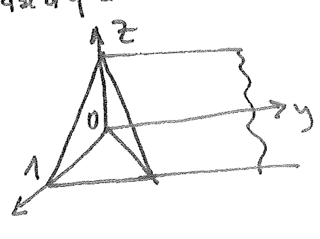
4. смена $u = \frac{y^2}{x}$, $v = xy$ $\quad 1 \le u \le 4$, $2 \le v \le 4$

$$P = \iint\limits_D dx\,dy = \iint\limits_{\substack{1\le u\le 4\\ 2\le v\le 4}} |J|\,du\,dv \qquad J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{\frac{D(u,v)}{D(x,y)}} = -\frac{1}{3\frac{y^2}{x}} = -\frac{1}{3u}$$

$$= \iint\limits_{\substack{1\le u\le 4\\ 2\le v\le 4}} \frac{1}{3u}\,du\,dv = \frac{1}{3}\int_2^4 dv \int_1^4 \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{3}\cdot 2\ln 4 = \frac{4}{3}\ln 2$$

5. Green-ова формула $I = \iint\limits_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(2x - xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y^3}{3}\right)\right)dx\,dy = 2\iint\limits_D dx\,dy = 2\pi$

6. $I = \iiint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 2x\\ 0\le z\le 1-x}} z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{12}.$



Ime i prezime: Broj indeksa:

Odsek: Sala: Broj sa spiska:

Matematika 3 – Test znanja 1

Zadaci [Šifra 102]

1. Funkcija f

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|xy^2|^k}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}\qquad (k>0)$$

je diferencijabilna u tački $(0,0)$ ako i samo ako k pripada skupu:
Odgovor: $(1,+\infty)$

2. Ako je $z=f(u,v)$ i $u=e^y$, $v=xy$ tada je
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{vv}\cdot y^2$

3. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $u=-\frac{3}{x}-\frac{3}{y}$ pod uslovom $x^3+y^3=2$.
Odgovor: $u_{max}(1,1)=-6$

4. Izračunati površinu oblasti ograničenu krivama
$y=x^2, y=4x^2, xy=1, xy=2$.
Odgovor: $P=\frac{2}{3}\ln 2$

5. Izračunati $I=\int\limits_c \frac{y^3}{3}\,dx+(x+xy^2)\,dy$ gde je c krug $x^2+y^2=2y$.
Odgovor: $I=\pi$

6. Izračunati $\iiint\limits_D z\,dx\,dy\,dz$ gde je oblast D ograničena ravnima
$x+z=1, y=3x, y=0, z=0$ u prvom oktantu.
Odgovor: $I=1/8$

Ime i prezime: Broj indeksa:

Odsek: Sala:

Matematika 3 – Test znanja
Zadaci

1. Za koje $k \in \mathbb{R}$ je funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} |xy|^k \ln(x^2+y^2), & x^2+y^2>0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

neprekidna, a NIJE diferencijabilna?

Odgovor: $k \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

2. Odrediti funkciju $r \to f(r)$, gde je $r = \sqrt{x^2+y^2}$, tako da $z = f(r)$ zadovoljava jednačinu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Odgovor: $f(r) = C_1 \ln r + C_2 \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

3. Naći ekstremne vrednosti funkcije $z = x - y$, pod uslovom $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 2$.

Odgovor: $z_{min}(1,-1) = 2$

$z_{max}(-1,1) = -2$

4. Izračunati $I = \oint\limits_c (3x^2y - y^3 - y^2)\,dx + (x^3 - 3xy^2)\,dy$, gde je c kružnica $x^2+y^2 = 2x$, pozitivno orijentisana.

Odgovor: $I = 0$

5. Izračunati $I = \iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, gde je $D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

Odgovor: $I = \frac{\pi^2}{8}$

6. Odrediti analitičku funkciju $z \to f(z)$ čiji je realni deo $u(x,y) = 2\sin x \operatorname{ch} y - x$ i za koju je $f(0) = 0$.

Odgovor: $f(z) = 2\sin z - z$

МАТЕМАТИКА 3 - ТЕСТ ЗНАЊА

1. Користимо граничну вредност: $\lim_{x\to 0+} x^{\alpha}\ln x = 0$ за $\alpha>0$

Непрекидност функције f: $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0)$, тј. $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |xy|^{k}\ln(x^2+y^2)=0$

ако ставимо $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, тада је $x\to 0 \wedge y\to 0 \Leftrightarrow \rho \Rightarrow 0$

па имамо $\lim_{\rho\to 0} |\rho\cos\varphi\,\rho\sin\varphi|^{k}\ln\rho^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{\rho\to 0+} \rho^{2k}\ln\rho\cdot|\sin 2\varphi| = 0$

а то је за $k>0$, пошто је $|\sin 2\varphi|\le 1$

$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, па је $f(\Delta x,\Delta y)=f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y+\omega(\rho)\cdot\rho$

$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, односно $|\Delta x\Delta y|^{k}\ln(\Delta x^2+\Delta y^2)=\rho\,\omega(\rho) \Rightarrow$

$\omega(\rho)=\rho^{2k-1}\ln\rho\,|\sin 2\varphi| \Rightarrow \lim_{\rho\to 0}\omega(\rho)=0 \Leftrightarrow 2k-1>0$

тј. $k>1/2$, а не постоји $\lim_{\rho\to 0+}\omega(\rho)$ нити је ова гранична вредност једнака нули ако је $k\le 1/2$. Према томе ф-ја није диференц. за $k\in(0,1/2]$.

2. $\frac{\partial z}{\partial x}=f'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f'(r)}{r}\cdot x \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{d}{dr}\left(\frac{f'(r)}{r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\cdot x+\frac{f'(r)}{r}\cdot 1$

$$=\frac{f''(r)\cdot r-f'(r)}{r^3}x^2+\frac{f'(r)}{r}$$

Због симетрије је $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{f''(r)\cdot r-f'(r)}{r^3}y^2+\frac{f'(r)}{r}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \Leftrightarrow \frac{f''(r)r-f'(r)}{r^3}\underbrace{(x^2+y^2)}_{=r^2}+\frac{f'(r)}{r}=0 \Leftrightarrow f''(r)+\frac{f'(r)}{r}=0 \Rightarrow f(r)=C_1\ln r+C_2$

3. $F(x,y)=x-y+\lambda\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-2\right)$

$F_x=1-2\lambda x^{-3}=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{2\lambda}$
$F_y=-1-2\lambda y^{-3}=0 \Rightarrow y=-\sqrt[3]{2\lambda}$
$\rightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{4\lambda^2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{4\lambda^2}}=2 \Leftrightarrow \lambda=\pm 1/2$

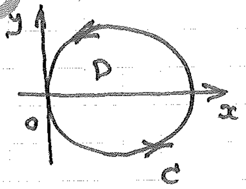
За $\lambda=1/2$ $x=1$, $y=-1$ $M_1(1,-1)$; $\lambda=-1/2 \Rightarrow x=-1$, $y=1$ $M_2(-1,1)$

$d^2F(x,y)=6\lambda\left(\frac{1}{x^4}dx^2+\frac{1}{y^4}dy^4\right)$

$d^2F(1,-1)=3(dx^2+dy^2)>0$, min $z_{min}(1,-1)=2$

$d^2F(-1,1)=-3(dx^2+dy^2)<0$, max $z_{max}(-1,1)=-2$.

4.



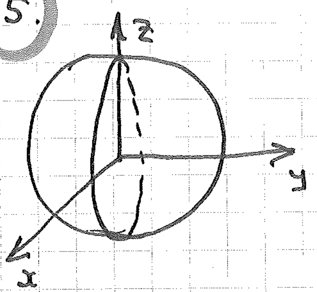
Применом Green-ове формуле

$$I = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y - y^3 - y^2) \right] dx\,dy = \iint_D 2y\,dx\,dy = 0$$

или $I = \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} y\,dy = 0$

Непарност подинт. ф-је, D симетрично у односу на x-осу.

5.



Увођењем сферних координата имамо:

$$I = \iiint\limits_{\substack{0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ -\pi/2 \le \theta \le \pi/2}} \rho|\cos\theta|\, \rho^2 \cos\theta \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta|\cos\theta|\, d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \pi \cdot 2\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta \cdot \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1$$

$$= \pi \cdot 2 \cdot \frac{1!!}{2!!} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{8}.$$

6.
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 2\cos x\,\mathrm{ch}\,y - 1 \Rightarrow v(x,y) = 2\cos x\,\mathrm{sh}\,y - y + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow 2\sin x\,\mathrm{sh}\,y = -(-2\sin x\,\mathrm{sh}\,y + \varphi'(x)) \Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = c$$

$$v(x,y) = 2\cos x\,\mathrm{sh}\,y - y + c$$

$$f(x+iy) = 2\sin x\,\mathrm{ch}\,y - x + i(2\cos x\,\mathrm{sh}\,y - y + c)$$

За $x=0$ $f(x) = 2\sin x - x + ic \Rightarrow f(z) = 2\sin z - z + ic$, $f(0) = 0 \Rightarrow ic = 0$

па је $f(z) = 2\sin z - z$.

МГ

Ime i prezime: Broj indeksa:

Odsek: Sala:

Matematika 3 – Test znanja 1

Zadaci [Šifra 102]

1. Funkcija

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|xy^4|^k}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

je neprekidna, a nije diferencijabilna u tački $(0,0)$ ako i samo ako k pripada skupu:

$\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right]$

2. Odrediti funkciju oblika $z=f(r)$, gde je $r=x^2+y^2$ koja zadovoljava parcijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Odgovor: $f(r)=$ $C_1 \ln r + C_2$

3. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, pod uslovom $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}, x<0, y<0.$

Odgovor: $f_{min}(-2,-2)=-1$

4. Izračunati $I=\iint\limits_D(2x+y)\,dxdy$, gde je D oblast ograničena pravama $y=x$, $y=\frac{1}{2}x, y=1.$

Odgovor: $I=$ $4/3$

5. Izračunati $I=\int\limits_{\widehat{AB}}(3x^2+x^3y)e^{xy}\,dx+x^4e^{xy}\,dy$ gde je $\widehat{AB}$: $x^2+y^2=ax$, $y\geq 0$, uzet od tačke $A(2a,0), B(0,0), (a>0).$

Odgovor: $I=-a^3$

6. Primenom trojnog integrala izračunati zapreminu tela ograničenog površima $z=2x^2+5y^2$, $z=1$.

Odgovor: $V=\frac{\pi}{2\sqrt{10}}$

Ime i prezime: Broj indeksa:

Odsek: Sala:

Matematika 3 – Test znanja

Zadaci

1. Funkcija f definisana je sa

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\left(\ln(x^2+y^2)-1\right), & \text{ako je } x^2+y^2>0 \\ 0, & \text{ako je } x^2+y^2=0. \end{cases}$$

Koliko je $f_{xy}(0,0)$?

Odgovor: $f_{xy}(0,0) = 0$

2. Ako je $z = f(u,v)$ i $u = e^y$, $v = \ln xy$, tada je $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ jednako

$a)\ -\dfrac{1}{x^2}(f_{vv}-f_v)$; $b)\ \dfrac{1}{x^2}f_{vv}$; $c)\ -\dfrac{1}{x^2}f_{vv}$; $d)\ \dfrac{1}{x^2}(f_{vv}-f_v)$;

$e)\ \dfrac{e^y}{x}f_{uv} + \dfrac{1}{xy}f_{vv} + \dfrac{1}{x}f_v$; $f)\ \dfrac{e^y}{x}f_{uv} + \dfrac{1}{xy}f_{vv} - \dfrac{1}{x}f_v$.

3. Odrediti prirodu stacionarnih tačaka funkcije $f(x,y) = x^3y + xy^3 + 4x^2 - xy + 4y^2 - 4$.

Odgovor: $(0,0)$ min

$(\pm 3/2, \mp 3/2)$ седласте тачке

4. Izračunati $I = \oint\limits_c \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right) dx + (xy + xy^2)\,dy$, gde je c kriva rub oblasti $xy=1, xy=3, y=x, y=2x, (x>0)$ pozitivno orijentisan.

Odgovor: $I = 2$

5. Naći vrednost integrala $I = \iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+1}\,dS$ gde je S konačni deo površi koja nastaje kada se površ $x^2+y^2 = 2z^2, z \geq 0$ odseče sa površi $x^2+y^2-z^2=1$.

Odgovor: $I = \frac{\sqrt{2}}{3}(9-\sqrt{3})\pi$

6. Izračunati $I = \iint\limits_S yz\,dydz + zx\,dzdx + (xy+z^2)\,dx\,dy$ gde je S spoljna strana tela određenog površima $z = 2 - \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{2}$ i $z = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2}$.

Odgovor: $I = 2\sqrt{6}\pi$

Teorijska pitanja

1. Definisati neprekidnost funkcija više promenljivih.

2. Koji su potrebni, a koji dovoljni uslovi diferencijabilnosti funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$?

3. Navesti potrebne i dovoljne uslove da integral $\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ ne zavisi od puta integracije, pri čemu su funkcije $P, Q, R \in C(D)$, $D \subset R^3, D \neq \emptyset$ i kriva $L \subset D$.

4. Iskazati GREEN-RIEMANNovu teoremu.

Kolokvijum traje 120 minuta. Svaki zadatak i pitanje nosi po 3 poena. Izradu možete pisati na poleđini lista. Vežbanke i slični dodatni papiri neće biti pregledani.

Beograd, 6. decembar, 2015.

IME I PREZIME: BR. INDEKSA:

ODSEK: SALA:

Elektrotehnički Fakultet
Univerzitet u Beogradu

šifra 12311

Test iz Matematike 3

Zadaci

1. Funkcija $f(x,y) = |xy|^k, (k > 0)$ nije diferencijabilna u tački $(0,0)$ ako i samo ako k pripada skupu:

$A)\ (0, \frac{1}{3}]$ $B)\ (0,1)$ $C)\ (0, \frac{1}{2}]$ $D)\ (0, +\infty)$ $E)\ (0,2)$ $F)\ (0, \frac{2}{3}]$

2. Ako je $z = f(u,v)$ i $u = e^y,\ v = e^{xy}$, tada je $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ jednako:

$A)\ f_{uu}y^2e^{2xy}$ $B)\ f_{vv}y^2e^{2xy}$ $C)\ (f_{uu}e^{xy} + f_u)y^2e^{xy}$

$D)\ (f_{vv}e^{xy} + f_v)y^2e^{xy}$ $E)\ (f_{uu}ye^{xy} + f_{uv})ye^{xy} + f_uy^2e^{xy}$

$F)\ (f_{vv}ye^{xy} + f_{uv})ye^{xy} + f_uy^2e^{xy}$

3. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = -x^2 + xy - y^2 + 6x$.
Odgovor: $z_{max}(4,2) = 12$

4. Promeniti redosled integracije $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$.
Odgovor: $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$

5. Izračunati $I = \int\limits_c \frac{y^3}{3}dx + (x + xy^2)dy$ gde je c krug $x^2 + y^2 = 2x$ pozitivno orijentisan.
Odgovor: $I = \pi$

6. Izračunati $I = \iint\limits_S (x + y^2)dydz + (y + z^2)dzdx + (z + x^2)dxdy$ gde je S spoljna strana sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz,\ (R > 0)$.
Odgovor: $I = 32\pi R^3$

IME I PREZIME: BR. INDEKSA:

ODSEK: SALA:

Elektrotehnički Fakultet
Univerzitet u Beogradu

šifra 12312

Test iz Matematike 3

Zadaci

1. Funkcija $f(x,y) = |x^2y|^k, (k > 0)$ nije diferencijabilna u tački $(0,0)$ ako i samo ako k pripada skupu:

$A)\ (0, \frac{1}{3}]$ $B)\ (0,1)$ $C)\ (0, \frac{1}{2}]$ $D)\ (0, +\infty)$ $E)\ (0,2)$ $F)\ (0, \frac{2}{3}]$

2. Ako je $z = f(u,v)$ i $u = e^{xy},\ v = e^y$, tada je $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ jednako:

$A)\ f_{uu}y^2e^{2xy}$ $B)\ f_{vv}y^2e^{2xy}$ $C)\ (f_{uu}e^{xy} + f_u)y^2e^{xy}$

$D)\ (f_{vv}e^{xy} + f_v)y^2e^{xy}$ $E)\ (f_{uu}ye^{xy} + f_{uv})ye^{xy} + f_uy^2e^{xy}$

$F)\ (f_{vv}ye^{xy} + f_{uv})ye^{xy} + f_uy^2e^{xy}$

3. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = x^2 - xy + y^2 - 6y$.
Odgovor: $z_{min}(2,4) = -12$

4. Promeniti redosled integracije $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$.
Odgovor: $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} f(x,y)\,dx$

5. Izračunati $I = \int\limits_c (y + yx^2)dx + \frac{x^3}{3}dy$ gde je c krug $x^2 + y^2 = 2x$ pozitivno orijentisan.
Odgovor: $I = -\pi$

6. Izračunati $I = \iint\limits_S (x + y^3)dydz + (2y + z^3)dzdx + (3z + x^3)dxdy$ gde je S spoljna strana sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz$, $(R > 0)$.
Odgovor: $I = 64\pi R^3$

Ime i prezime: Broj indeksa:

Odsek: Sala:

Matematika 3 – Test znanja 1

Zadaci

1. Odrediti parametar α tako da funkcija $f : R^2 \to R$ definisana na sledeći način

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^\alpha \cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

je neprekidna, a NIJE diferencijabilna u tački $(0,0)$.
Odgovor: $\alpha \in (0, 1/2]$

2. Odrediti $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ ako je $u = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, pri čemu je $x_3 = g(x_2, x_4)$ i $x_4 = h(x_1, x_2)$.
Odgovor: $\frac{\partial u}{\partial x_2} =$

3. Odrediti lokalne ekstremume funkcije $f(x,y) = xy - \dfrac{50}{x} - \dfrac{20}{y}$.
Odgovor: $f_{min}(-5, -2) = 30$

4. Promeniti redosled integracije $I = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$.
Odgovor: $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dy$

5. Izračunati krivolinijski integral

$$I = \oint\limits_c (x^2y + \cos x)\,dx - (xy^2 + \sin y)\,dy,$$

gde je c pozitivno orijentisan rub oblasti $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq y, x \geq 0\}$
Odgovor: $I = -\dfrac{3}{64}\pi$

6. Izračunati $I = \iiint\limits_D z\,dx\,dy\,dz$ gde je D oblast ograničena elipsoidom $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = z$ i ravnima $x = 0$ i $y = 0$ u prvom oktantu.
Odgovor: $I = \dfrac{\pi}{1296\sqrt{2}}$

Teorijska pitanja

1. Iskazati teoremu o razmeni dva limesa (Moore-ova teorema), za funkciju dve promenljive.

2. Za funkciju $f : D \to R$, $D \subset R^n$, uslov postojanja parcijalnih izvoda, po svim promenljivim, u tački x_0 je:

   a) potreban

   b) dovoljan

   c) potreban i dovoljan

   d) niti potreban, niti dovoljan

uslov diferencijabilnosti funkcije f u toj tački.

3. Definisati krivolinijski integral I vrste.

4. Iskazati teoremu Gauss-Ostrogradskog.

Kolokvijum traje 120 minuta. Svaki zadatak i pitanje nosi po 3 poena. Izradu možete pisati na poleđini lista. Vežbanke i slični dodatni papiri neće biti pregledani.

Beograd, 24. novembar, 2013.

Ime i prezime: Broj indeksa:

Odsek: Sala:

Matematika 3 – Test znanja 1
Zadaci [Šifra 102]

1. Ako je $z = f(u, v)$ i $u = xy$, $v = \frac{y^2}{2}$ tada je
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$

2. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $u = -\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{y}$ pod uslovom: $x^2 + y^2 = 2, x > 0, y > 0$.
Odgovor:

3. Izračunati krivolinijski integral
$$I = \int\limits_c y^2 \cos xy \, dx + \left(\frac{x^2}{2} + \sin xy + xy \cos xy\right) dy,$$
gde je c rub oblasti $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq y, x \geq 0\}$ pozitivno orijentisan.
Odgovor: $I =$

4. Izračunati zapreminu V tela koje ograničava površ $\left(\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} + z^2\right)^2 = z$.
Odgovor: $V =$

5. Izračunati površinski integral $I = \iint\limits_S y^2 z \, dydz + z^2 x dzdx + z\sqrt{x^2 + y^2} \, dxdy$, gde je S spoljna strana tela $x^2 + y^2 = 2z, z = 2$.
Odgovor: $I =$

6. Odrediti prirodu singulariteta $z = 1$ funkcije $f(z) = \cos \dfrac{1}{z-1}$. Obrazložiti.

Teorijska pitanja

1. Navesti formulu za parcijalni izvod prvog reda po definiciji za funkciju n promenljivih.

2. Veza površinskog integrala I i II vrste.

3. Definisati površinski integral II vrste.

4. *a*) Navesti CAUCHY-RIEMANNove uslove u dekartovim koordinatama.

b) Važenje CAUCHY-RIEMANNovih uslova u nekoj tački je:

- *a*) potreban
- *b*) dovoljan
- *c*) potreban i dovoljan
- *d*) niti potreban, niti dovoljan

uslov diferencijabilnosti funkcije kompleksne promenljive u toj tački.

Kolokvijum traje 120 minuta. Svaki zadatak i pitanje nosi po 3 poena. Izradu možete pisati na poleđini lista. Vežbanke i slični dodatni papiri neće biti pregledani.

Beograd, 10. decembar, 2011.

Ime i prezime: Broj indeksa:

Odsek: Sala:

Matematika 3 – Test znanja 1

Zadaci [Šifra 101]

1. Ako je $z = f(u,v)$ i $u = \frac{x^2}{2}$, $v = xy$ tada je
$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$

2. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $u = \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$ pod uslovom: $x^2 + y^2 = 2, x > 0, y > 0$.
Odgovor:

3. Izračunati krivolinijski integral
$$I = \int_c (\sin xy + xy \cos xy)\, dx + (xy + x^2 \cos xy)\, dy,$$
gde je c rub oblasti $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0\}$ pozitivno orijentisan.
Odgovor: $I =$

4. Izračunati zapreminu V tela koje ograničava površ $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + z^2\right)^2 = z$.
Odgovor: $V =$

5. Izračunati površinski integral $I = \iint_S yz^2\, dydz + zx^2 dzdx + z\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$, gde je S spoljna strana tela $x^2 + y^2 = z, z = 1$.
Odgovor: $I =$

6. Odrediti prirodu singulariteta $z = 1$ funkcije $f(z) = \cos \frac{1}{z-1}$. Obrazložiti.

Teorijska pitanja

1. Navesti formulu za parcijalni izvod prvog reda po definiciji za funkciju n promenljivih.

2. Veza površinskog integrala I i II vrste.

3. Definisati površinski integral II vrste.

4. *a*) Navesti CAUCHY-RIEMANNove uslove u dekartovim koordinatama.

b) Važenje CAUCHY-RIEMANNovih uslova u nekoj tački je:

- *a*) potreban
- *b*) dovoljan
- *c*) potreban i dovoljan
- *d*) niti potreban, niti dovoljan

uslov diferencijabilnosti funkcije kompleksne promenljive u toj tački.

Kolokvijum traje 120 minuta. Svaki zadatak i pitanje nosi po 3 poena. Izradu možete pisati na poleđini lista. Vežbanke i slični dodatni papiri neće biti pregledani.

Beograd, 10. decembar, 2011.